

3

تصميم
معلم رياضيات
محمود عوضتصميم
معلم رياضيات
محمود عوض

معلم أول رياضيات

محمود عوض

إعداد وتصميم

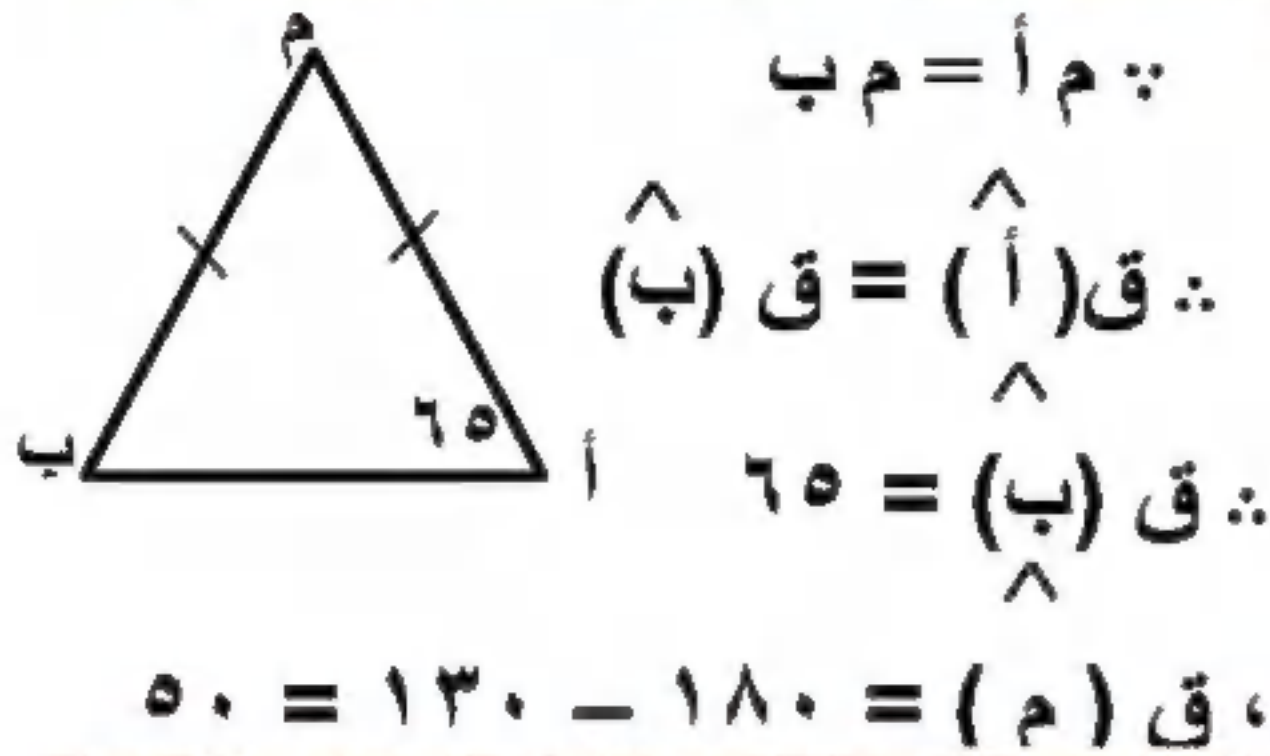


012 025 60 239

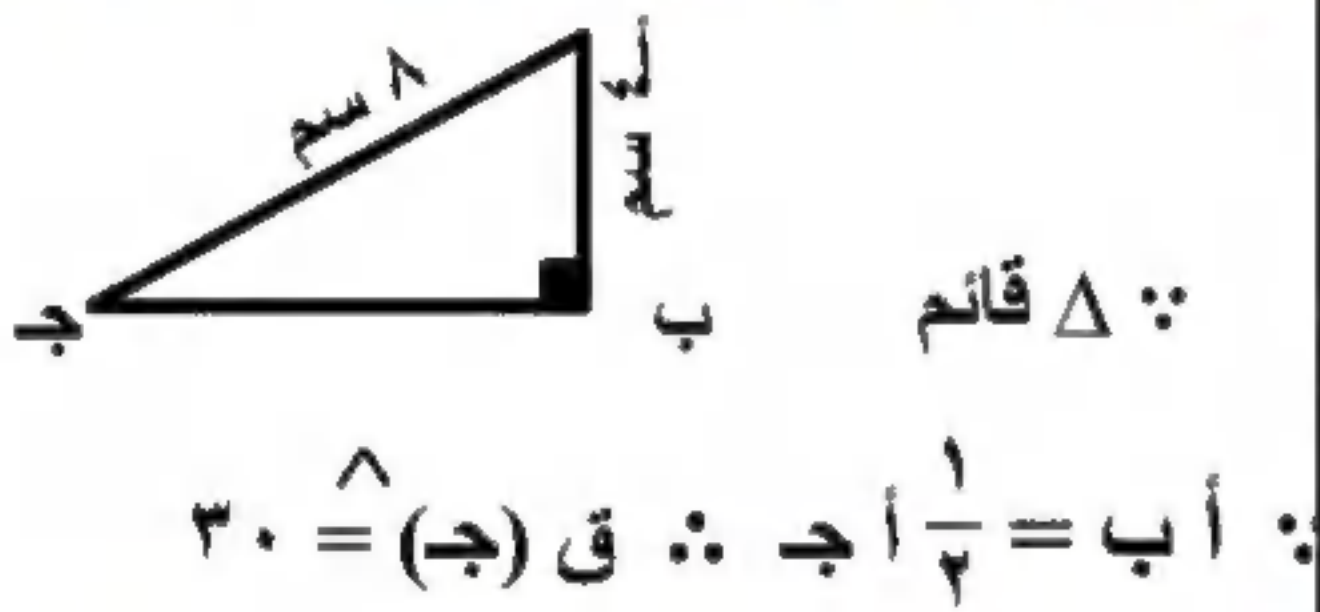


الفهرس

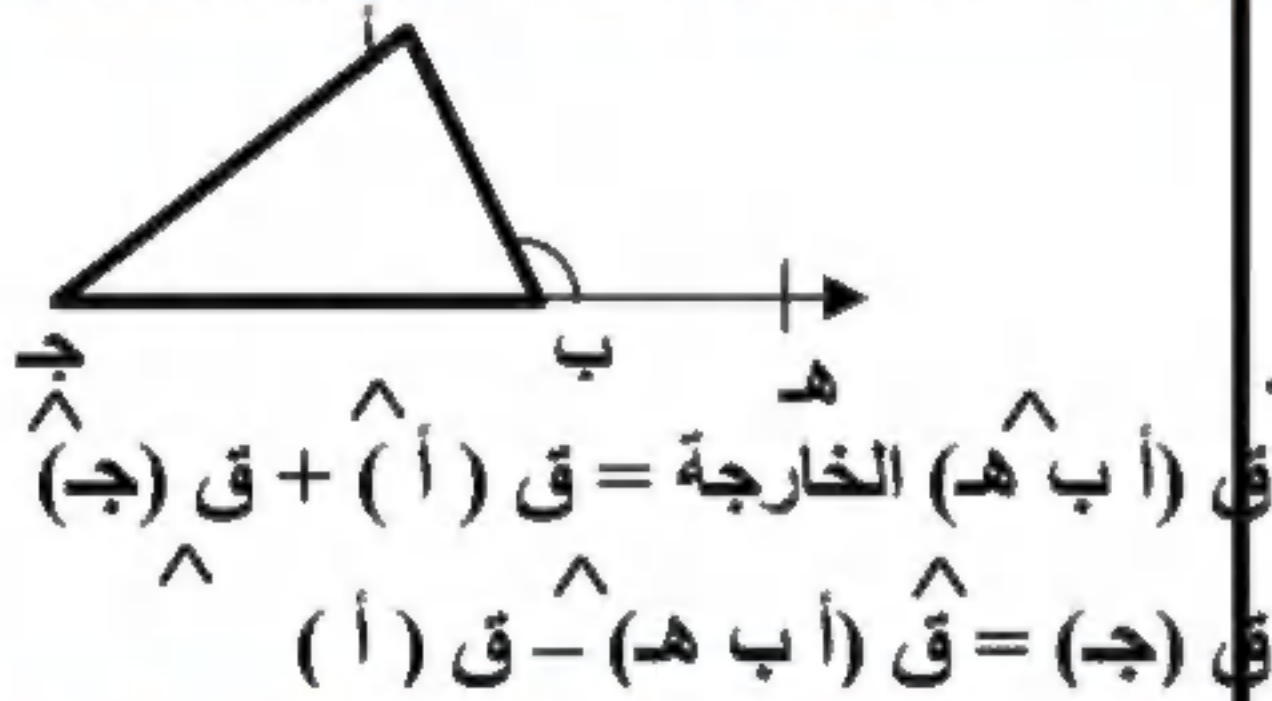
الدرس	رقم	الدرس	الصفحة
الوحدة الرابعة : الدائرة			
١		أساسيات تراكمية	
٢	١	مفاهيم أساسية	
٧	٢	أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة	
١٠	٣	أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة	
١٤	٤	علاقة أوتار الدائرة بمركزها	
١٧	٥	تعيين الدائرة	
الوحدة الخامسة : الزوايا والأقواس			
١٩	١	الزوايا المركزية وقياس الأقواس	
٢٣	٢	العلاقة بين المحيطية والمركزية	
٢٦	٣	تمارين مشهورة	
٢٨	٤	الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس	
٣٢	٥	الشكل الرباعي الدائري	
٣٥	٦	اثبات أن الشكل رباعي دائري	
٤٠	٧	العلاقة بين مماسات الدائرة	
٤٤	٨	الزوايا المماسية	
٤٨		حل نماذج امتحانات الكتاب المدرسي	
٥١		ملخص قوانين الهندسة	

في المثلث المتساوي الساقين
زاويتا القاعدة متساويتان

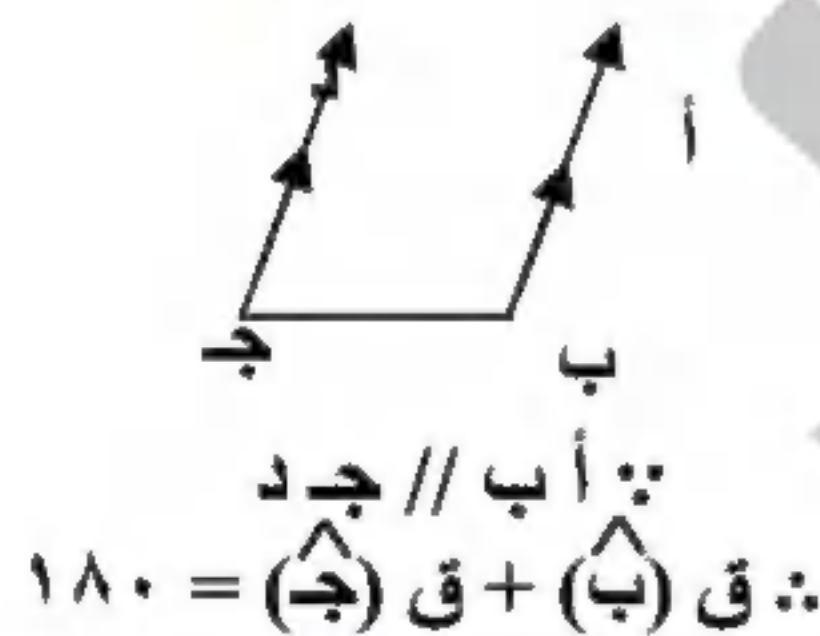
إذا كان طول الضلع = نصف طول
الوتر فإن الزاوية المقابلة له = 30



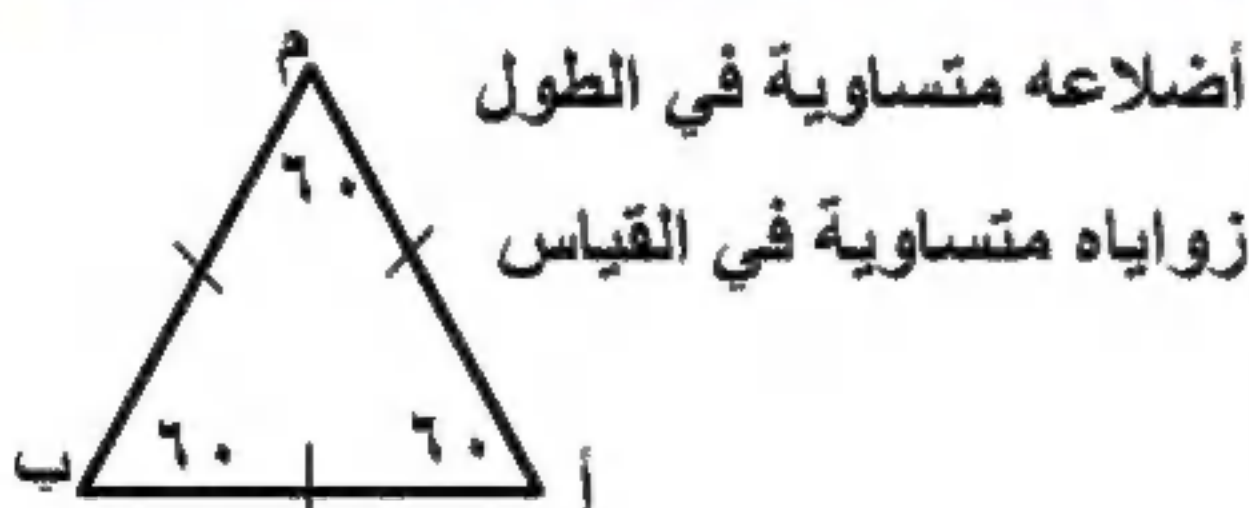
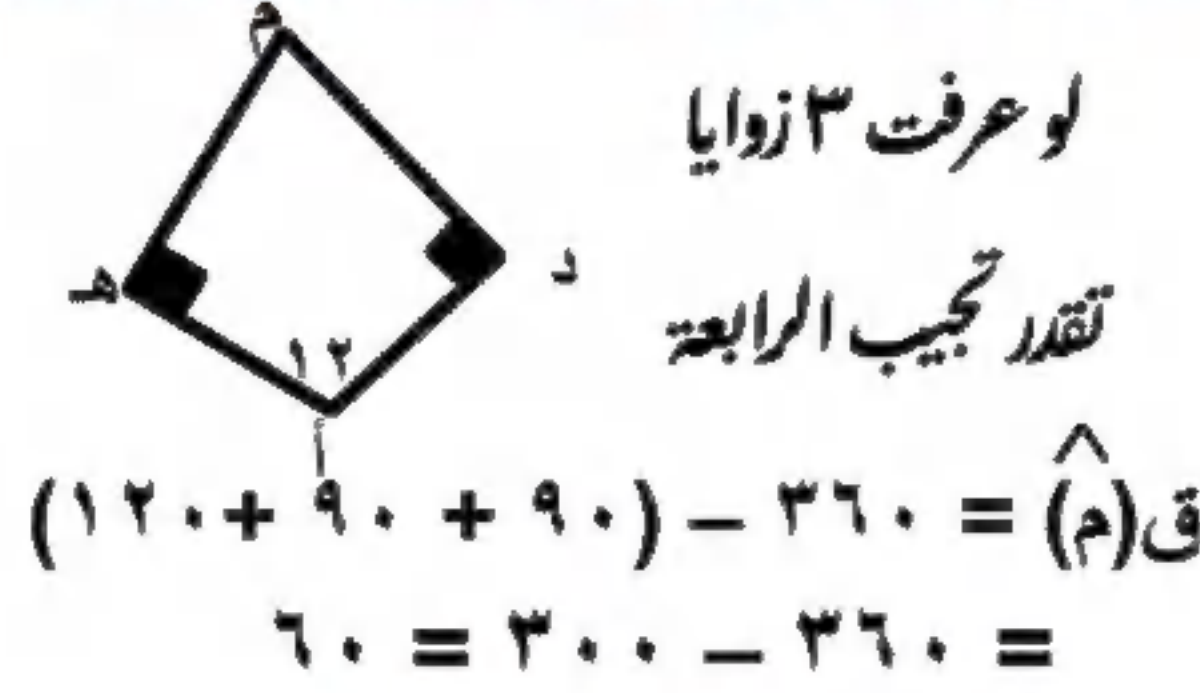
قياس الزاوية الخارجة عن المثلث =
مجموع الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة



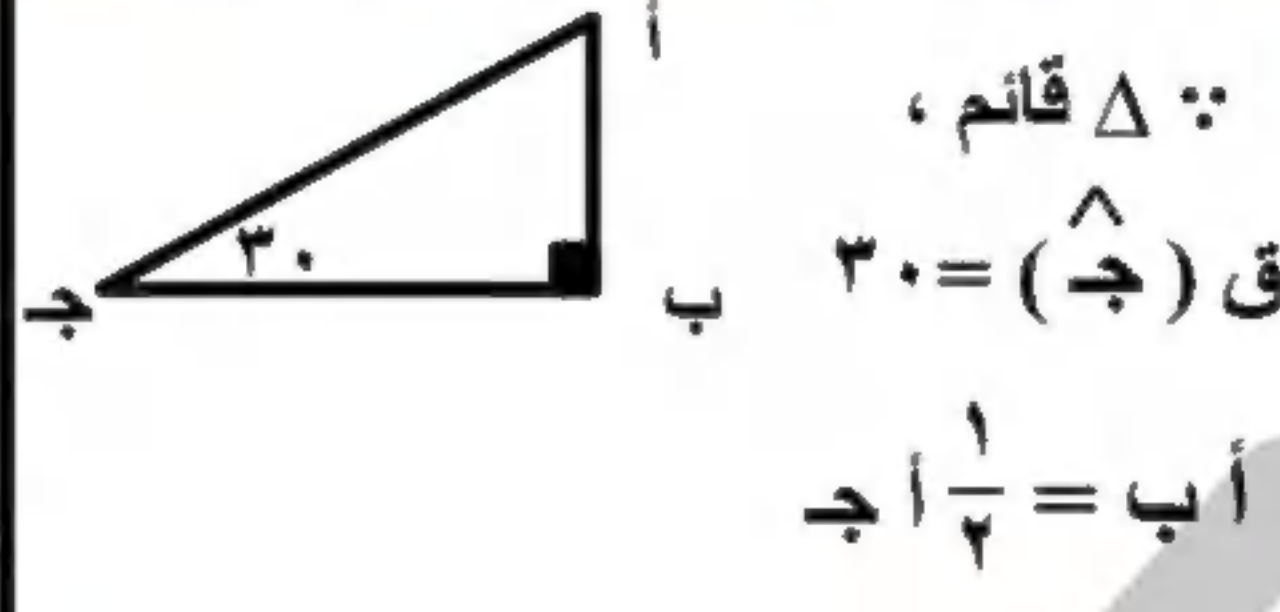
إذا وجد توازي حرف U فإن
الزاويتان المتداخلتان متكاملتان



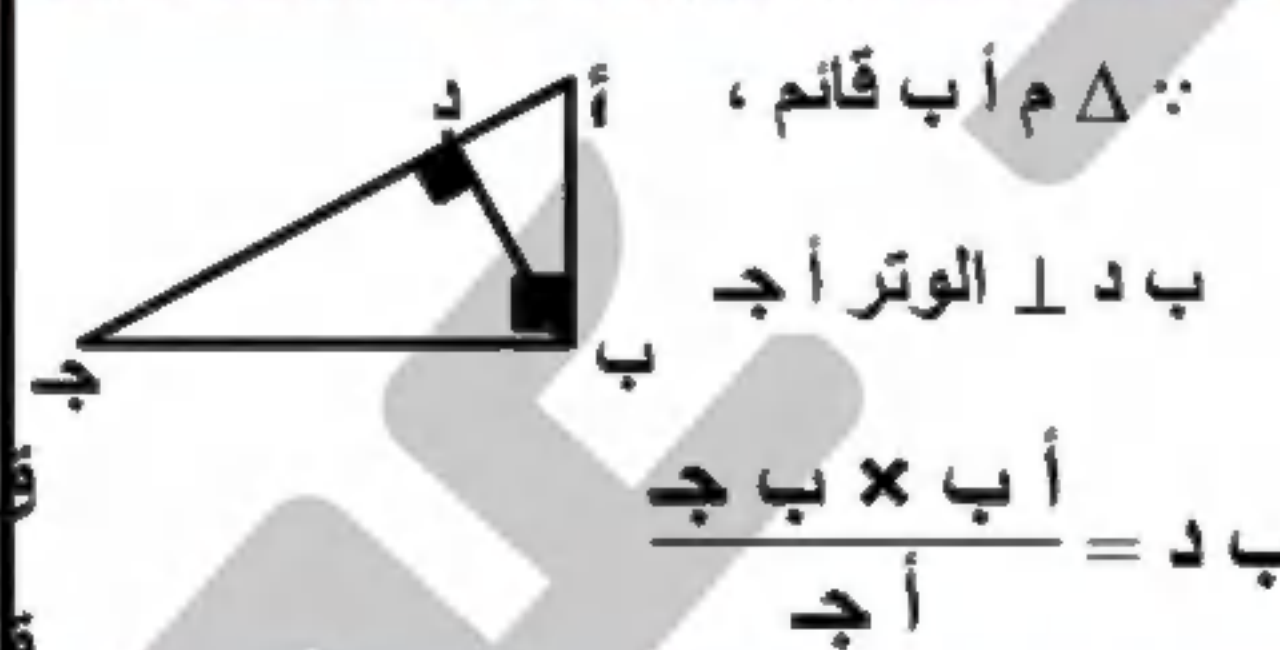
المثلث المتساوي الأضلاع

مجموع قياسات زوايا
الشكل الرباعي = 360

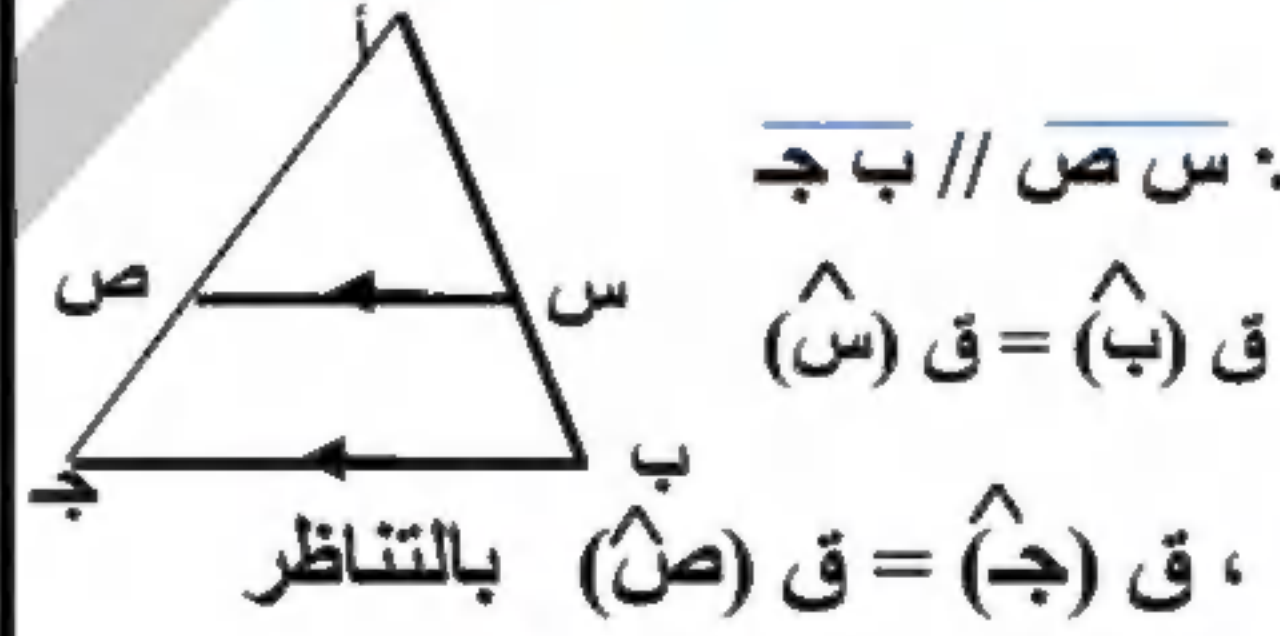
طول الضلع المقابل للزاوية 30
= نصف طول الوتر



نظرية إقليدس



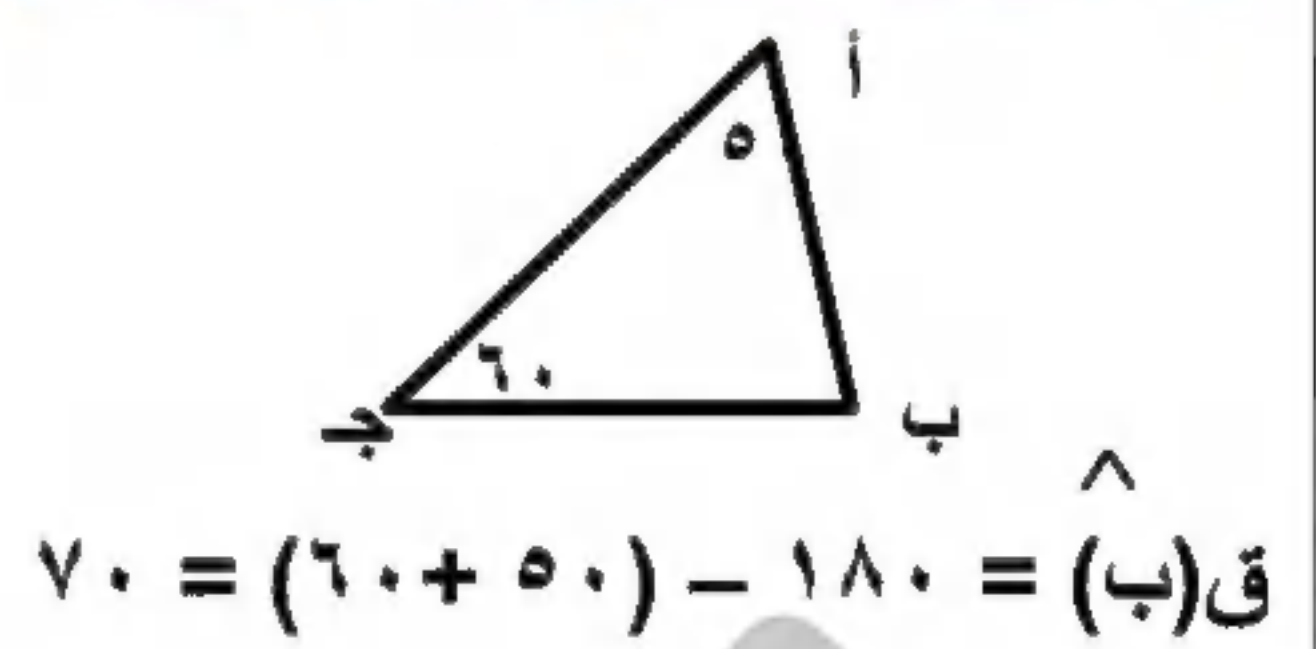
إذا وجد توازي حرف F فإن
الزاويتان المتناظرتان متساويتان



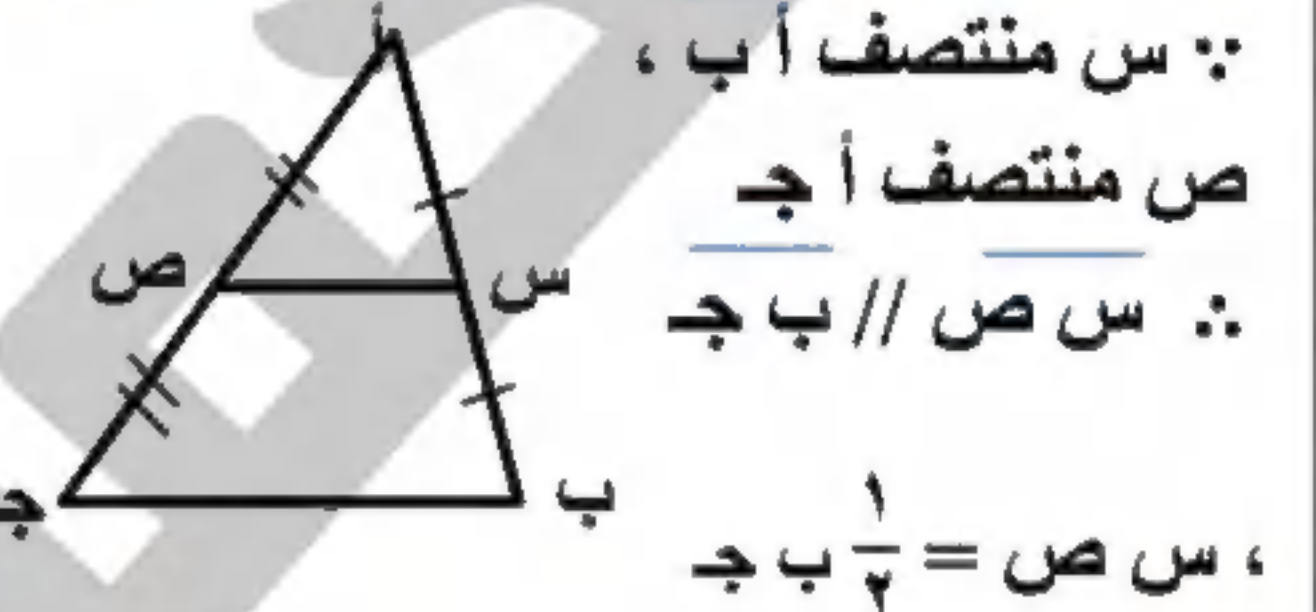
حالات تطابق مثلثين

- ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- زاويتان والضلع المرسوم بينهما
- وتر وضلع (في المثلث القائم)

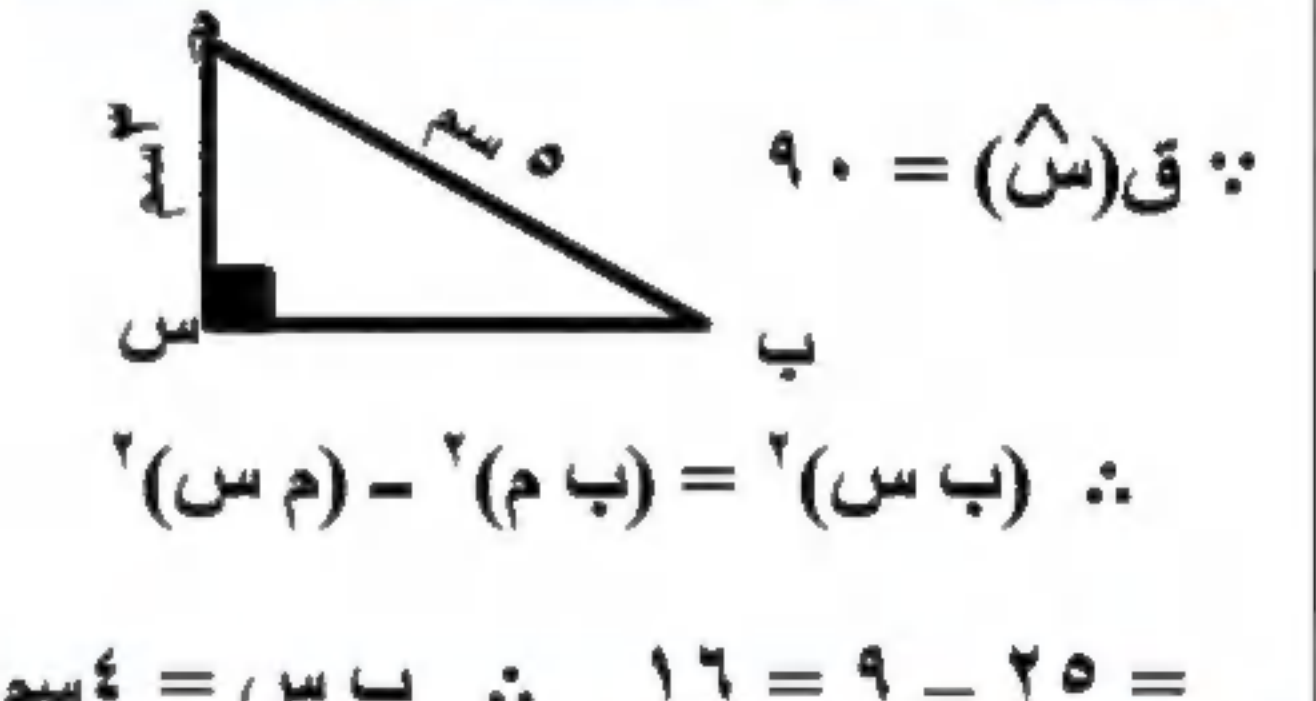
مجموع قياسات زوايا Δ = 180



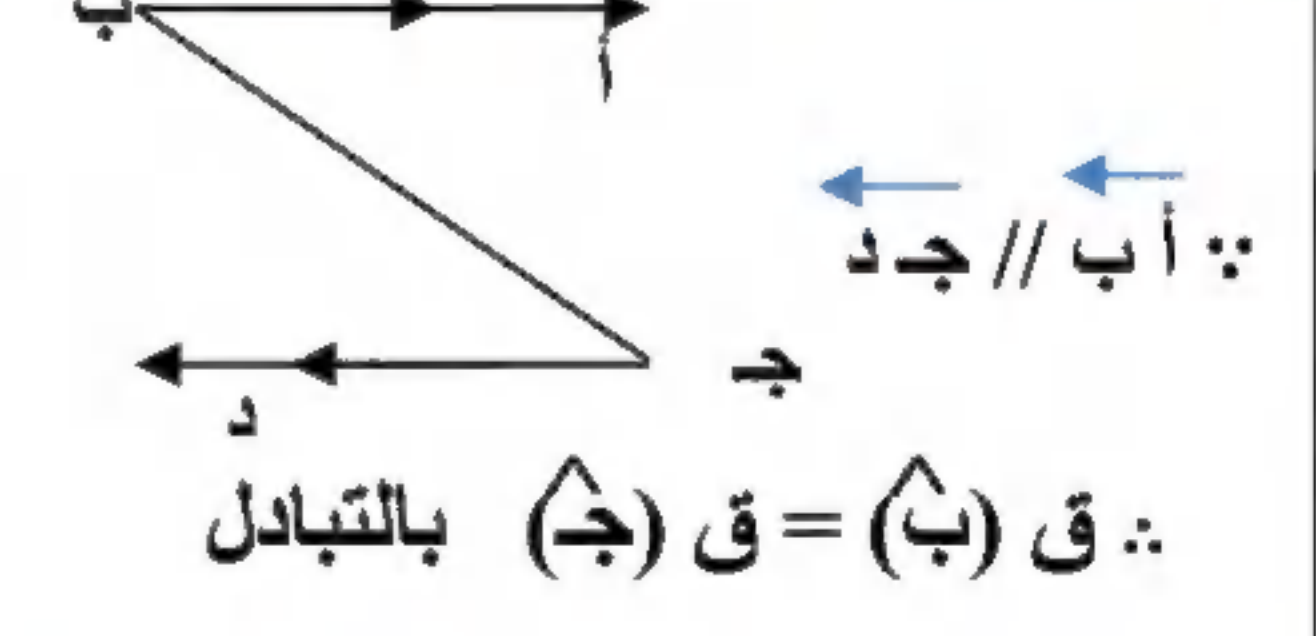
القطعة الواصلة بين منتصفى
ضلعين توازي الضلع الثالث



نظرية فيثاغورث



إذا وجد توازي حرف Z فإن
الزاويتان المتبادلتان متساويتان

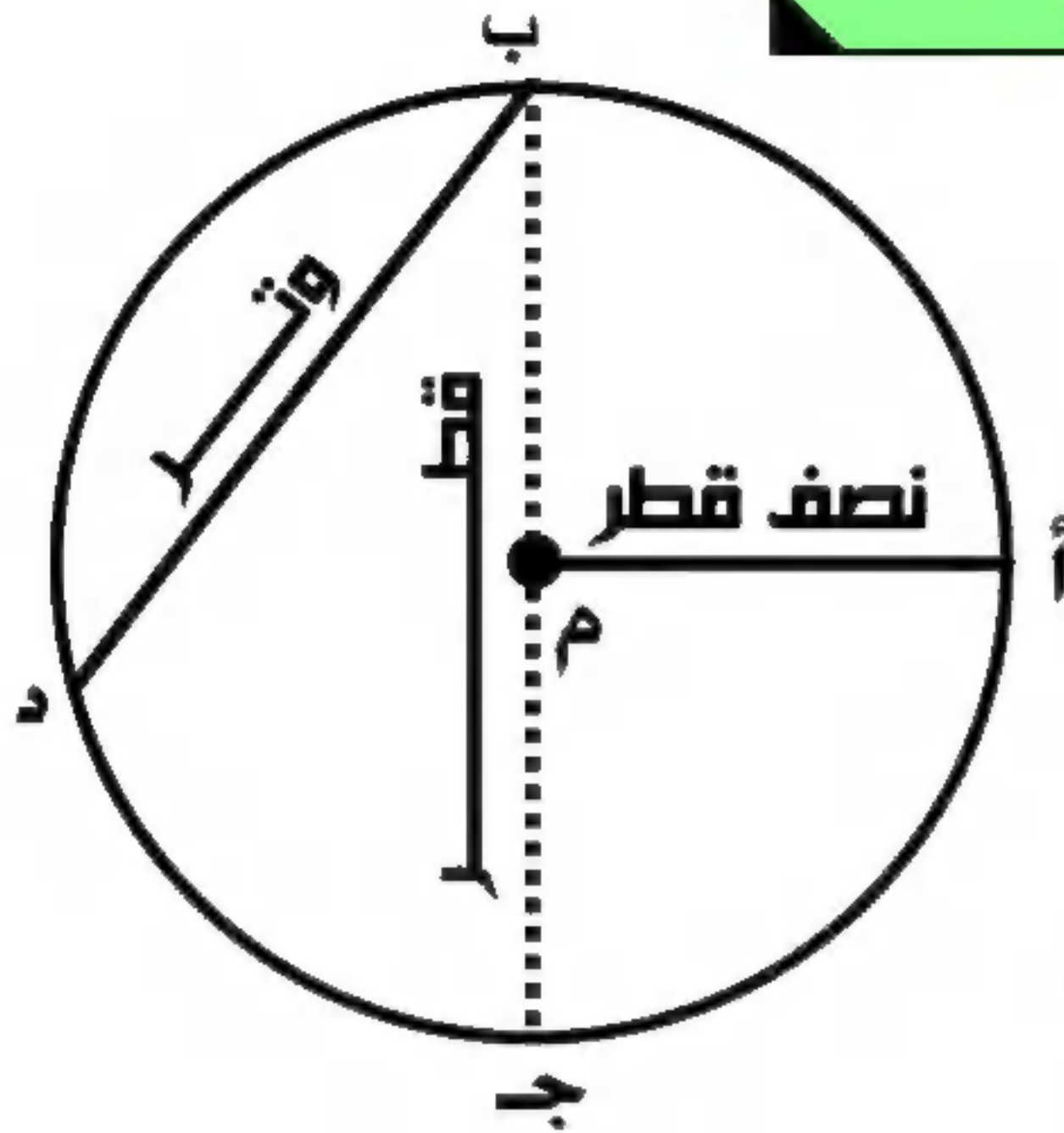


لإثبات التوازي

نبحث عن إحدى الحالات الآتية:

- زاويتان متبادلتان متساويتان
- زاويتان متناظرتان متساويتان
- زاويتان متداخلتان متكاملتان

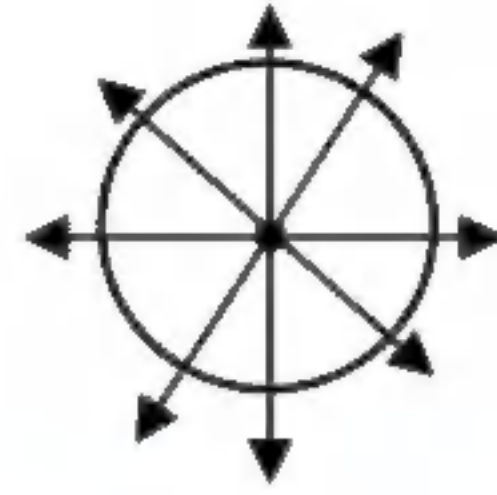
مفاهيم أساسية

الدرس
الأول 1

نصف القطر : هو قطعة مستقيمة طرفها مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة

الوتر : هو قطعة مستقيمة طرفها أي نقطتين على الدائرة

القطر : هو وتر مار بمركز الدائرة ، وهو أطول الأوتار طولاً



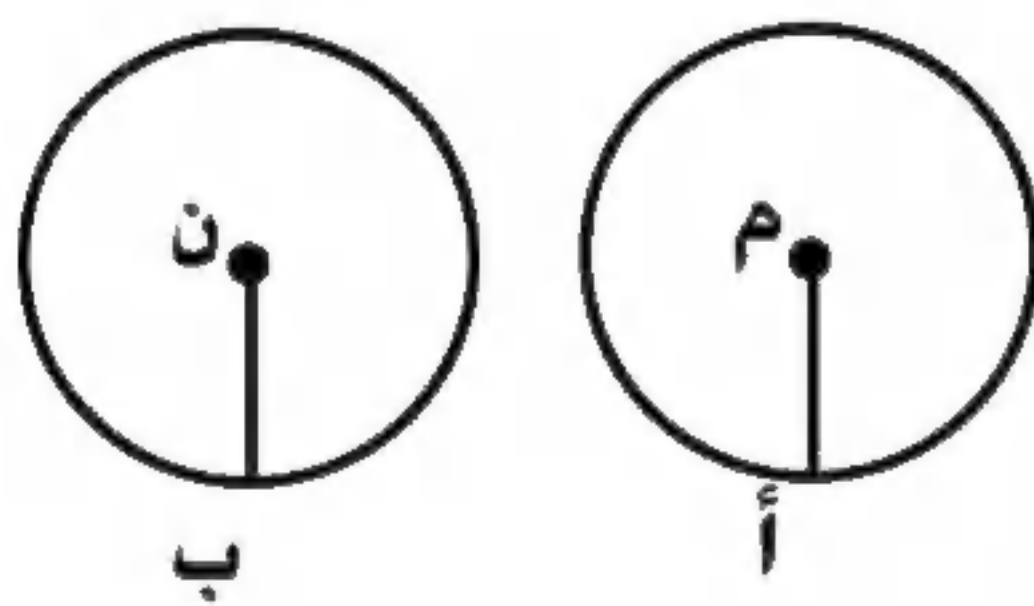
محور التماثل : هو المستقيم المار بمركز الدائرة.

الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التماثل

عدد محاور تماثل نصف أو ربع أو ثلث الدائرة محور واحد

الفرق بين الدائرة وسطح الدائرة

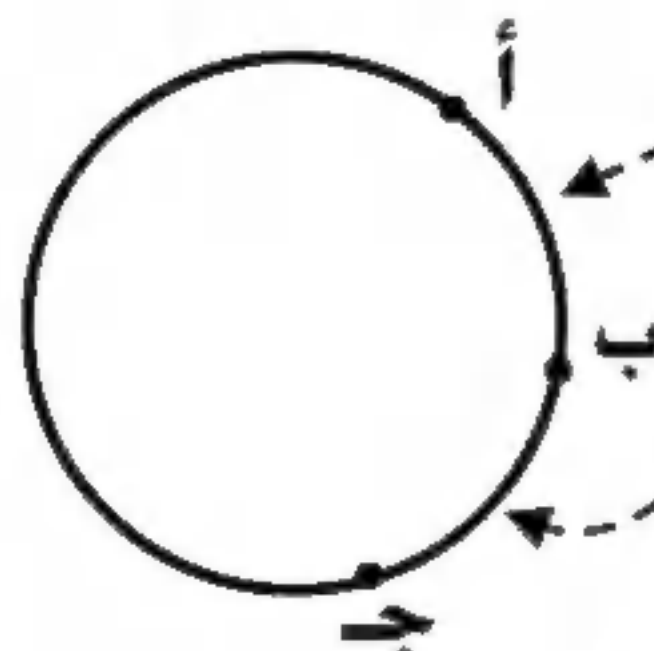
الدائرة	سطح الدائرة	ملحوظة مهمة
الخط الأسود المرسوم ده هو الدائرة	هو الخط الأسود + الجزء المظلل	<p>أ ب \cap الدائرة م = { أ ، ب }</p> <p>بينما أ ب \cap سطح الدائرة = أ ب</p>



الدائرتان المتطابقتان : هما دائرتان أنصاف أقطارهما متساوية في الطول.

إذا كانت م ، ن دائرتان متطابقتان فإن م أ = ن ب

القوس : هو جزء من خط الدائرة



من أ إلى ب يسمى قوس ويكتب : أ ب

من ب إلى ج يسمى قوس ويكتب : ب ج

من أ إلى ج يسمى قوس ويكتب : أ ج أو أ ب ج

ملاحظات : مساحة الدائرة = π نق²

محيط الدائرة = 2π نق

طول نصف الدائرة = π نق

طول ربع الدائرة = $\frac{1}{4}\pi$ نق



نتائج هامة



١ أنصاف الأقطار في الدائرة
الواحدة متساوية في الطول



∴ م أ ، م ب أنصاف أقطار
∴ م أ = م ب
أي أن : ق (أ) = ق (ب)

مثال ١



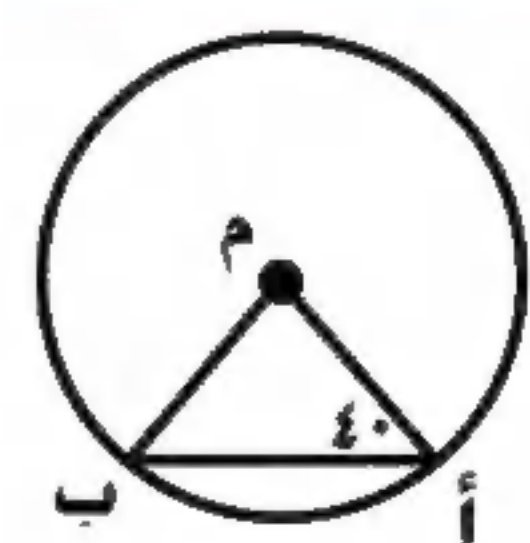
أوجد ق (م أ ب)

الحل : ∴ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ ق (أ) = ق (ب)

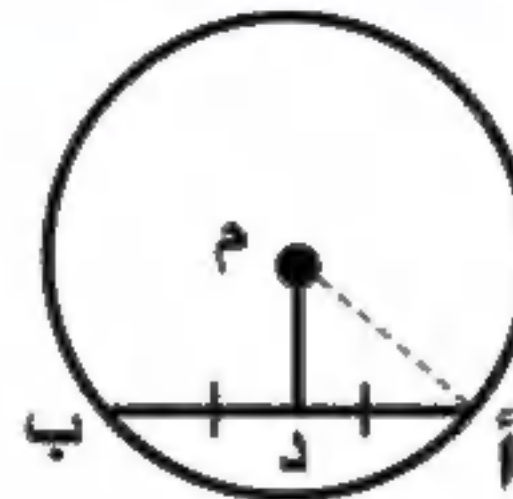
$$50 = \frac{180 - 80}{2} =$$

تدريب ١



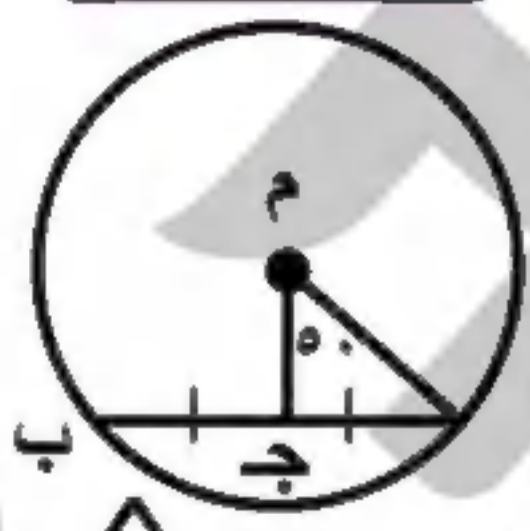
أوجد ق (أ م ب)

٢ المستقيم المار بمركز الدائرة
وبمنتصف أي وتر فيها
يكون عموديا على هذا الوتر



∴ د منتصف الوتر أ ب
∴ م د ⊥ أ ب
∴ ق (م د أ) = 90

مثال ٢



أوجد ق (م أ ج)

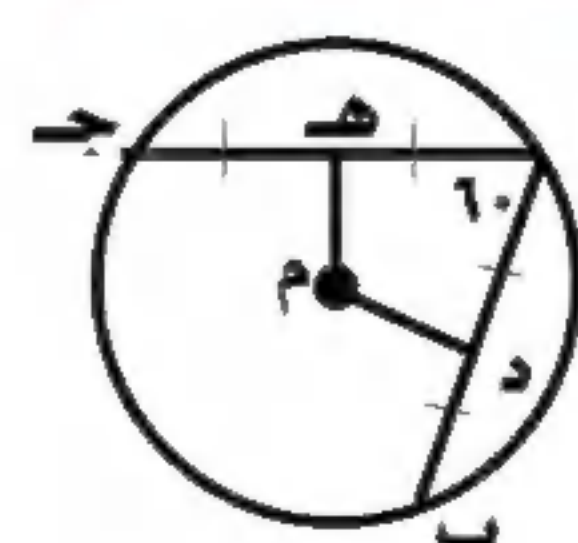
الحل :

∴ ج منتصف أ ب ∴ م ج ⊥ أ ب

∴ ق (م ج أ) = 90

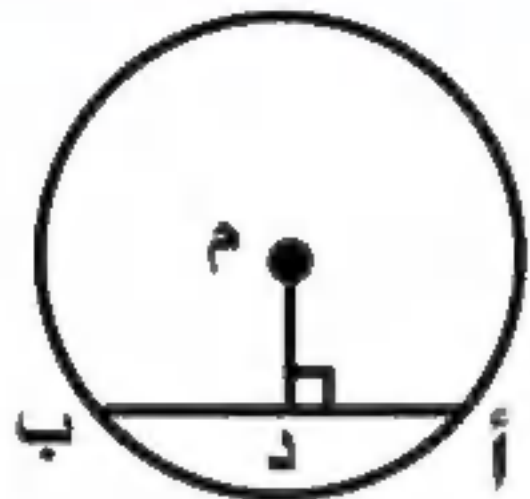
$$∴ ق (م أ ج) = 180 - (90 + 90) = 0$$

تدريب ٢



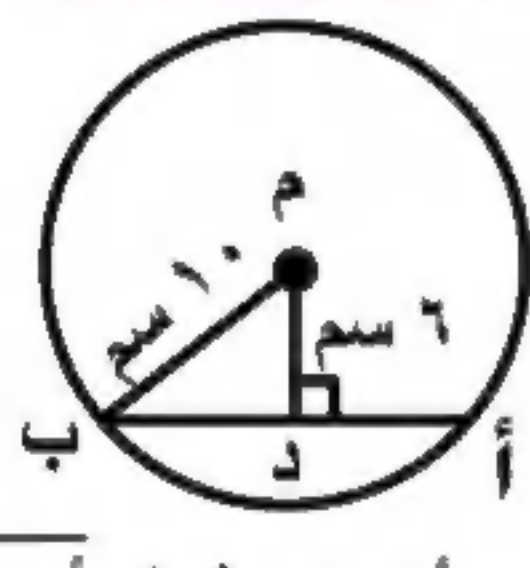
أوجد ق (د م هـ)

٣ المستقيم المار بمركز الدائرة
وعموديا على أي وتر فيها
ينصف هذا الوتر



∴ م د ⊥ أ ب
∴ د منتصف أ ب ∴ أ د = د ب
فإذا كان أ ب = ٨ سم فإن أ د = ٤ سم

مثال ٣



أوجد طول أ د

الحل :

في Δ م د ب من فيثاغورث

د ب = ٨ سم

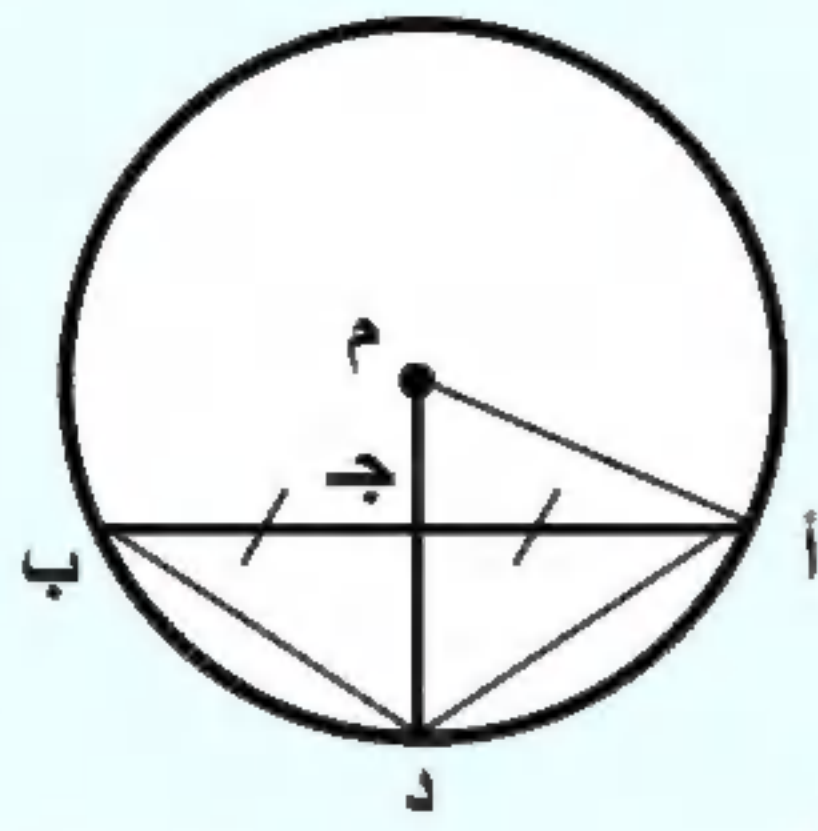
∴ م د ⊥ أ ب ∴ د منتصف أ ب

∴ أ د = د ب = ٨ سم

تدريب ٣



أ ب = ٨ سم أوجد م ب



٢ في الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم
 أب وتر فيها طوله ٢٤ سم
 ج منتصف أب
 أوجد: مساحة \triangle أدب

الحل

\therefore ج منتصف أب \therefore م ج \perp أب \therefore ق (م ج أ) $= 90^\circ$
 \therefore أب = ٢٤ سم \therefore أج = ١٢ سم

في \triangle م ج أ القائم : بتطبيق فيثاغورث

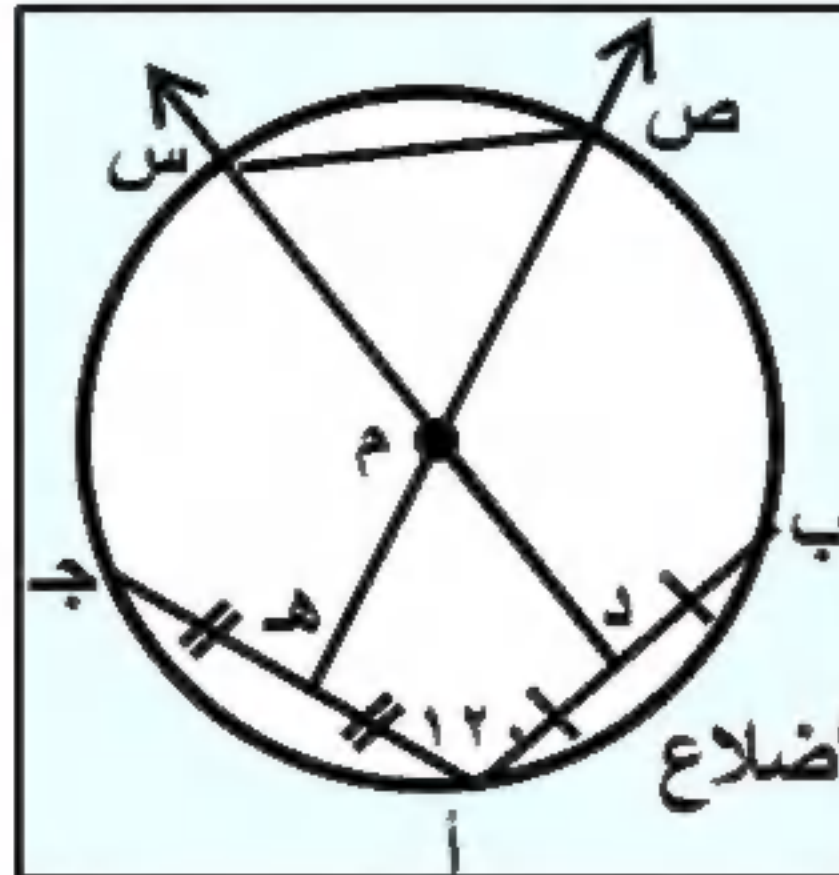
$$\therefore (م ج) = \sqrt{(١٣)^2 - (١٢)^2} = \sqrt{١٦٩ - ١٤٤} = \sqrt{٢٥}$$

$$\therefore م ج = ٥ سم ، \therefore م د = ١٣ سم$$

$$\therefore ج د = ١٣ - ٥ = ٨ سم$$

\therefore مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ طول القاعدة \times الارتفاع

$$\therefore \text{مساحة } \triangle \text{ أدب} = \frac{1}{2} \times ٢٤ \times ٨ = ٩٦ \text{ سم}^2$$



١ في الشكل المقابل :

د ، ه منتصفا أب ، أج

على الترتيب

$$ق (\hat{أ}) = 120^\circ$$

اثبت أن \triangle س ص م متساوي الأضلاع

الحل

\therefore د منتصف أب \therefore م د \perp أب

$$\therefore ق (\hat{م د أ}) = 90^\circ$$

\therefore ه منتصف أج \therefore م ه \perp أج

$$\therefore ق (\hat{م ه أ}) = 90^\circ$$

\therefore مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

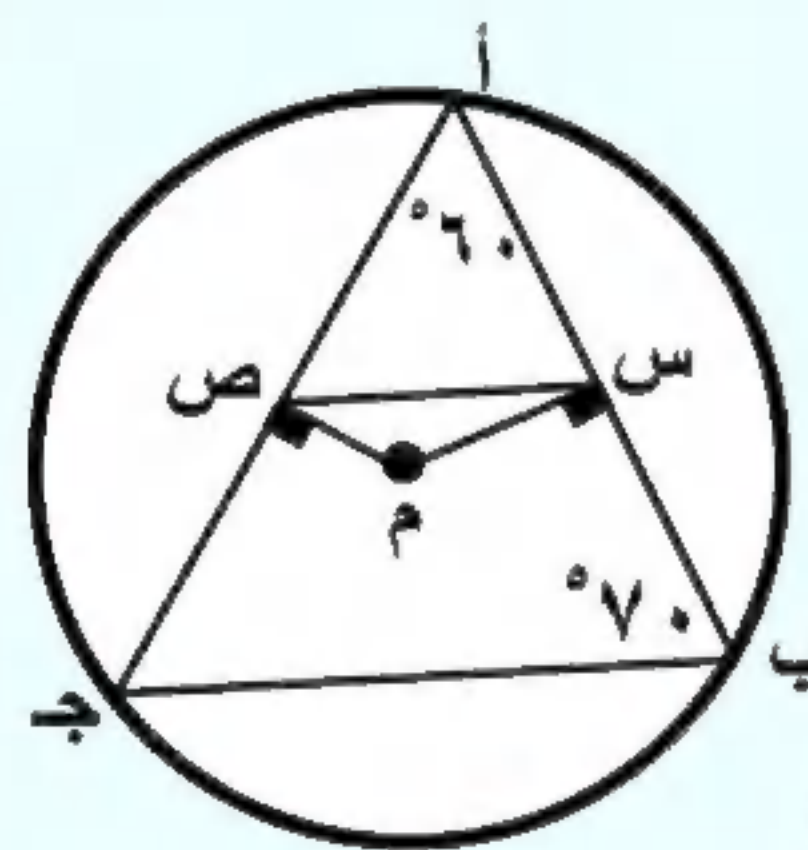
$$\therefore ق (\hat{د م ه}) = (120 + 90 + 90) - 360 = 60^\circ$$

$$\therefore ق (\hat{ص م س}) = 60^\circ \text{ بالتقابل بالرأس}$$

\therefore م ص = م س (أنصاف أقطار)

$$\therefore ق (\hat{م ص س}) = ق (\hat{م س ص}) = 60^\circ$$

$\therefore \triangle$ س ص م متساوي الأضلاع (جميع زواياه 60°)



٤ في الشكل المقابل :

م س \perp أب ، م ص \perp أج

$$ق (\hat{أ}) = 60^\circ$$

$$ق (\hat{ب}) = 70^\circ$$

أوجد قياسات زوايا \triangle م س ص

الحل

$$ق (\hat{ج}) = 180 - (60 + 70) = 50^\circ$$

\therefore م س \perp أب \therefore س منتصف أب

\therefore م ص \perp أج \therefore ص منتصف أج

\therefore س ص \parallel ب ج (قطعة واصله بين منتصفى ضلعين)

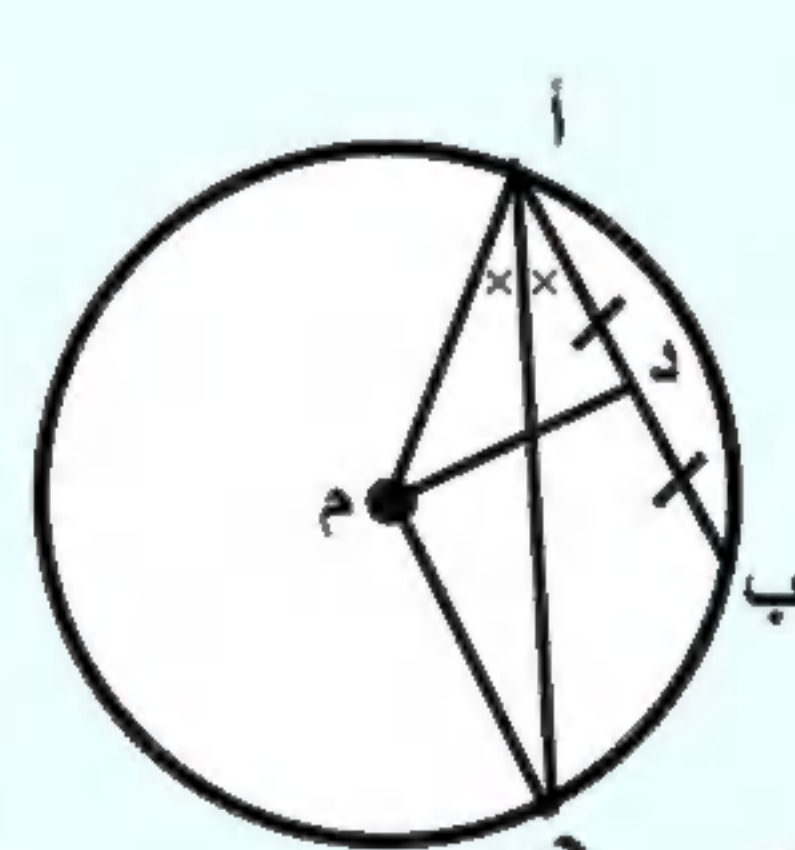
$$\therefore ق (\hat{أ س ص}) = 70^\circ ، ق (\hat{أ ص س}) = 50^\circ \text{ بالتناظر}$$

$$\therefore ق (\hat{م س ص}) = 90 - 70 = 20^\circ$$

$$، ق (\hat{م ص س}) = 90 - 50 = 40^\circ$$

في \triangle س م ص :

$$ق (\hat{س م ص}) = 180 - (40 + 20) = 120^\circ$$



٣ في الشكل المقابل :

أب وتر في الدائرة م

أج ينصف ب أ م

د منتصف أب

اثبت أن د م

الحل

في \triangle أ م ج : \therefore م أ = م ج (أنصاف أقطار)

$$\therefore ق (\hat{م أ ج}) = ق (\hat{م ج أ}) \text{ (١)}$$

$$\therefore ق (\hat{م أ ج}) = ق (\hat{ب أ ج}) \text{ (٢) معطى}$$

من ١ ، ٢ ينتج أن :

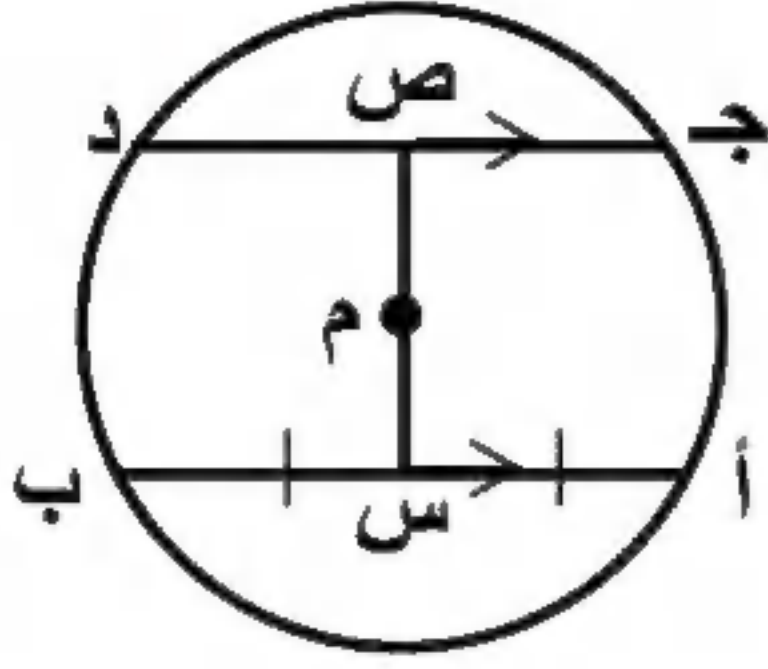
$$ق (\hat{م ج أ}) = ق (\hat{ب أ ج}) \text{ وهما متبادلتان}$$

$$\therefore$$

\therefore د منتصف أب \therefore م د \perp أب

\therefore أب \parallel ج م \therefore د م \perp ج م

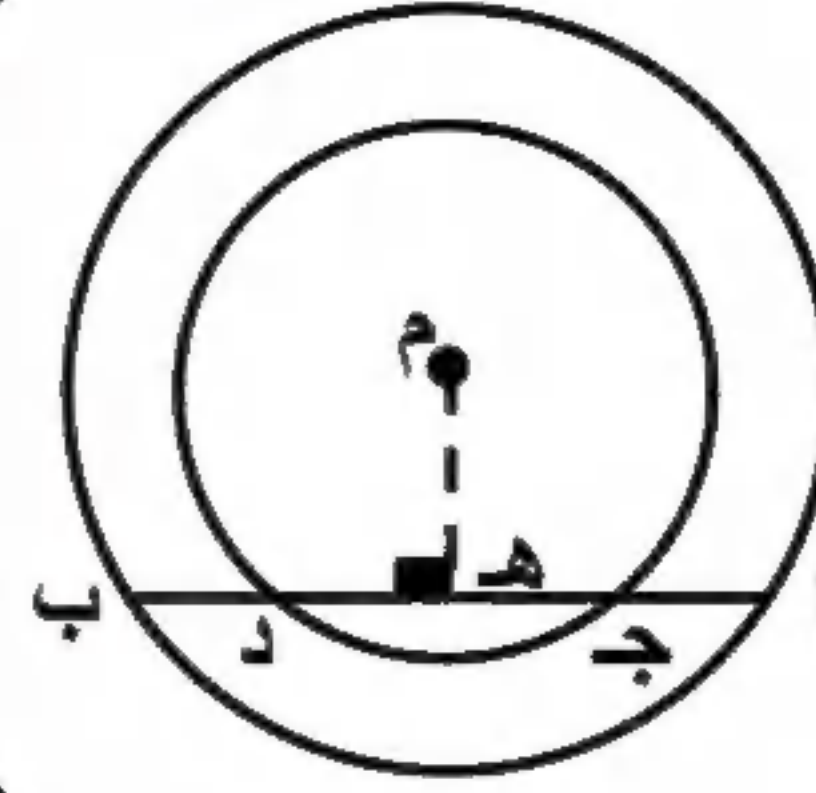
٣



أب // جد
س منتصف أب
اثبت أن :
ص منتصف جد

الحل

١

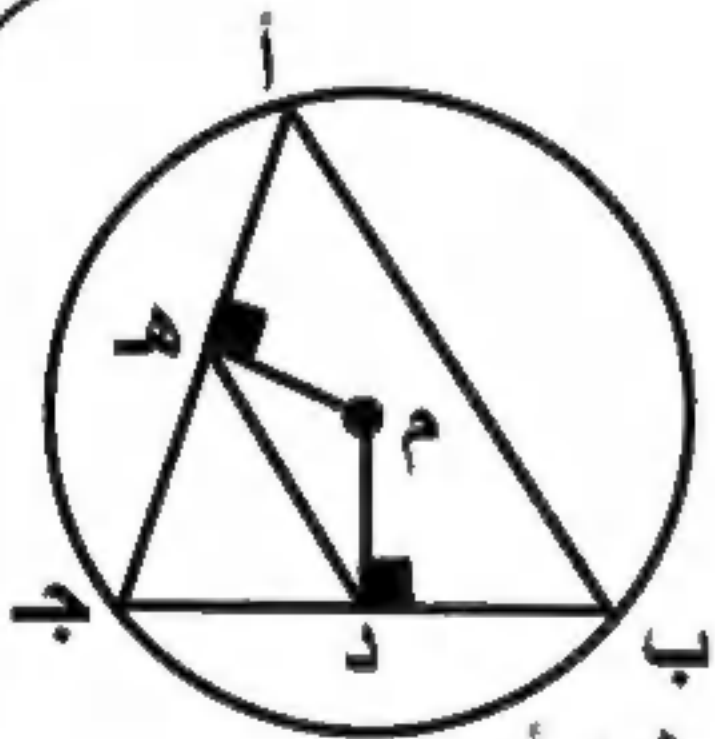


دائرتان متحدتا المركز م
أب وتر في الدائرة الكبرى
يقطع الصغرى في ج ، د
اثبت أن : أ ج = ب د

الحل

العمل : نرسم م ه عمودى على أب

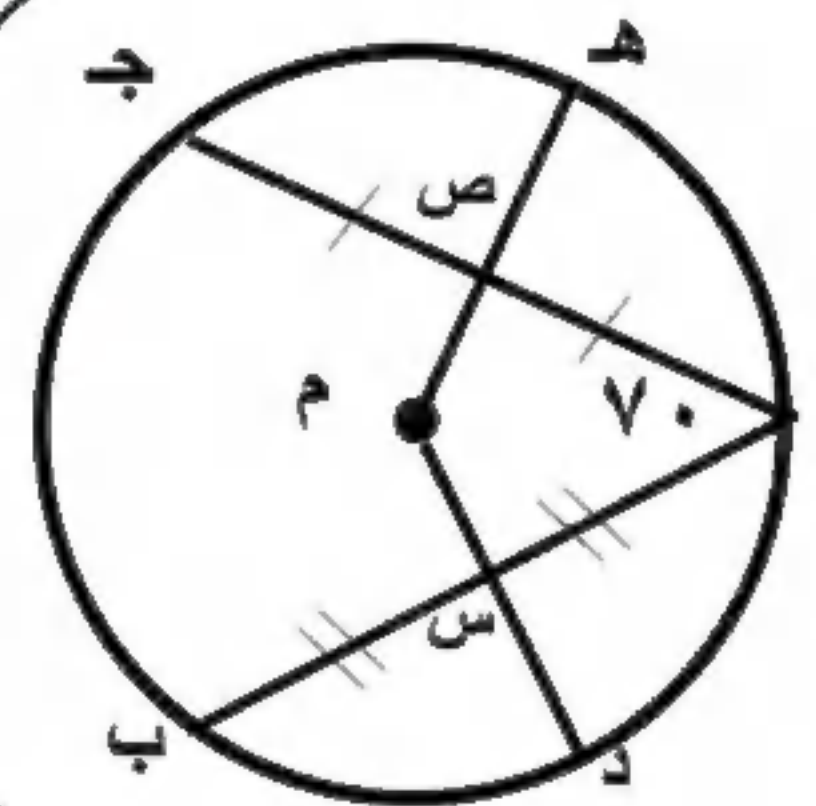
٤



أ ب ج د مرسوم داخل دائرة
م د \perp ب ج ، م ه \perp أ ج
اثبت أن : (١) ه د // أ ب
(٢) محيط Δ ج د ه = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب ج

الحل

٢



أ ب ، أ ج وتران
س منتصف أ ب ،
ص منتصف أ ج
ق (ج أ ب) = 70°
أوجد ق (د م ه)

الحل

تمارين

١ عدد محاور التماثل لأي دائرة هو

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي

٢ عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي

٣ محور تماثل الدائرة هو

- (أ) نصف القطر (ب) القطر (ج) الوتر (د) المستقيم المار بالمركز

٤ أكبر أوتار الدائرة طولاً يسمى

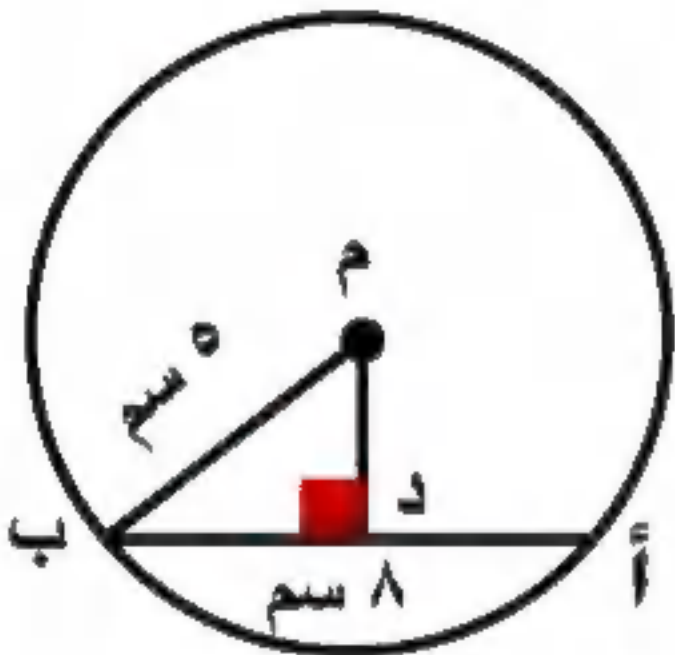
- (أ) وتر (ب) قطر (ج) نصف قطر (د) مماس

٥ دائرة طول أكبر وتر فيها = ١٢ سم فإن محيط الدائرة = سم

- (أ) $\pi ١٢$ (ب) $\pi ٦$ (ج) $\pi ٢٤$ (د) $\pi ١٠$

٦ القطر هو يمر بمركز الدائرة

- (أ) وتر (ب) مستقيم (ج) شعاع (د) مماس



٧ في الشكل المقابل: أ ب = ٨ سم ، م ب = ٥ سم فإن م د = سم

- (أ) ٥ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٢

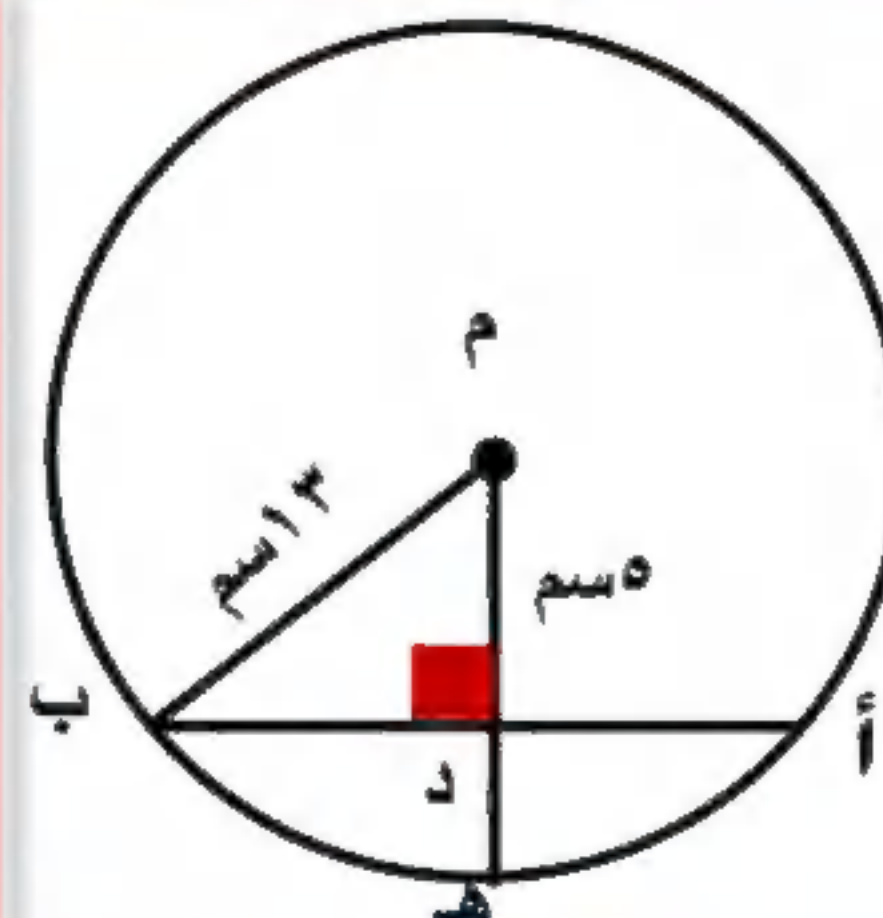


٨ في الشكل المقابل: د منتصف أ ج ، م ج \perp أ ب ، ج د = ٣ سم

فإن مساحة سطح الدائرة م تساوي π سم^٢

- (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ٣٦

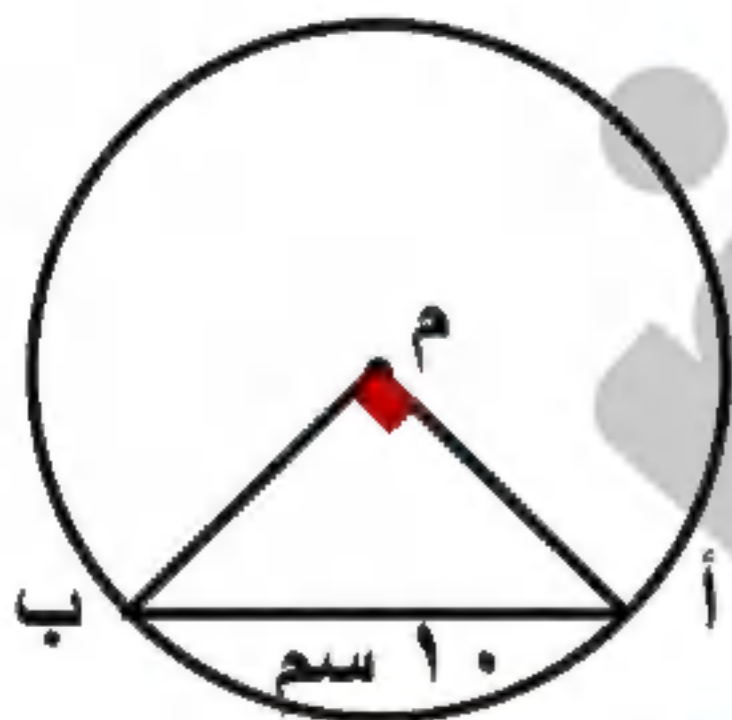
١ في الشكل المقابل:



أ ب = سم

هـ د = سم

٢ في الشكل المقابل:



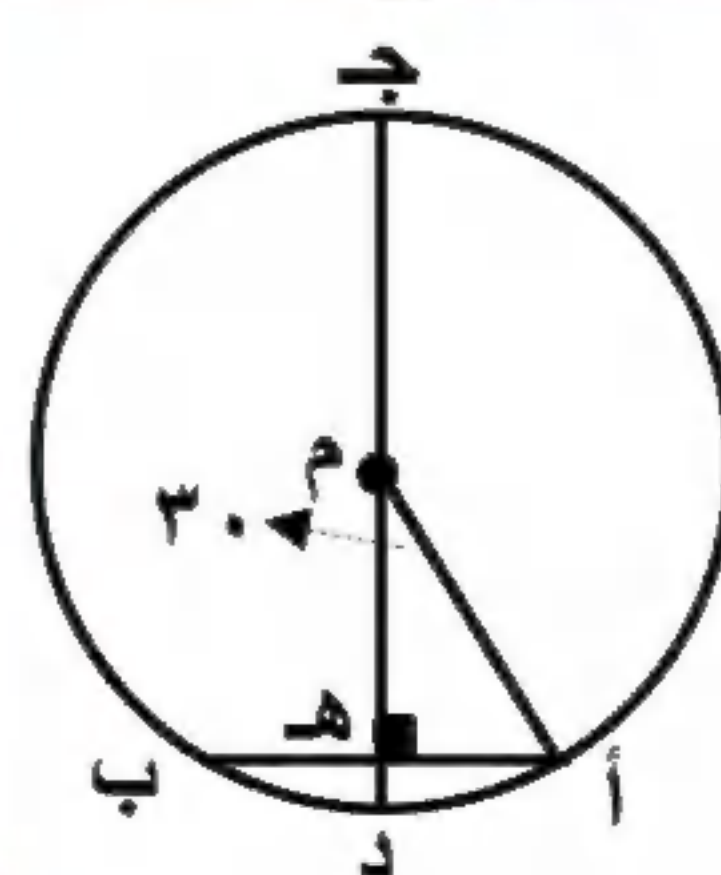
ق (أ) = °

م أ = سم

ملحوظة: طول ضلع المثلث القائم

$$\frac{\text{الوتر}}{2} = \sqrt{2}$$

٣ في الشكل المقابل:



ج د قطر في الدائرة م

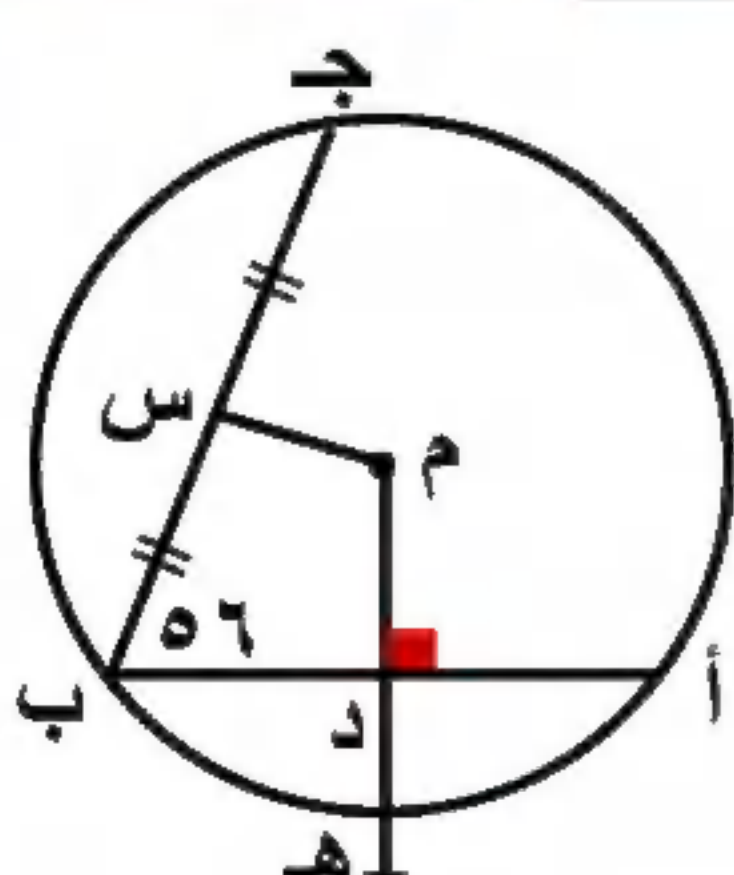
م هـ \perp أ ب

ق (أ م هـ) = ٣٠ °

أ ب = ١٠ سم

أوجد طول ج د ، هـ د

٤ في الشكل المقابل:



م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

س منتصف ب ج ، أ ب = ٨ سم

م د أ ب ، ق (ب) = ٥٦ °

أوجد: ق (د م س) ، طول د هـ

أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

الدرس
الثاني

أولا

أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

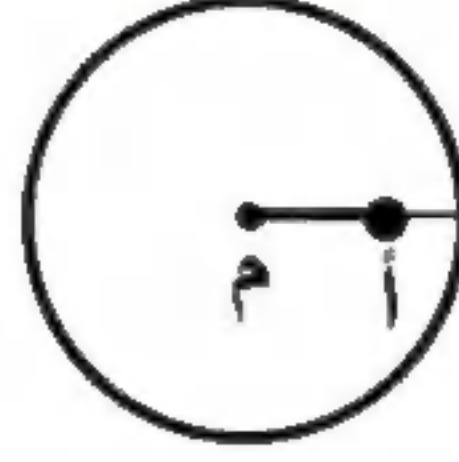
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فإن النقطة أ تقع :

على المركز



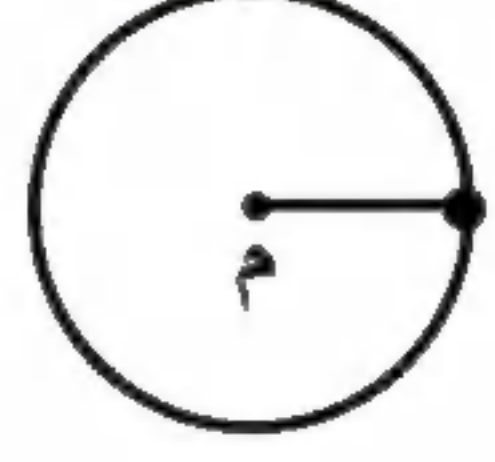
إذا كان : م أ = صفر

داخل الدائرة



إذا كان : م أ > نق

على للدائرة



إذا كان : م أ = نق

خارج الدائرة



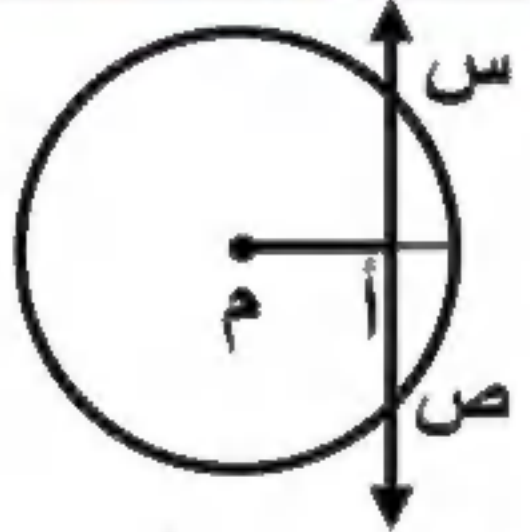
إذا كان : م أ < نق

أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة

ثانيا

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة ∃ المستقيم فإن المستقيم يكون :

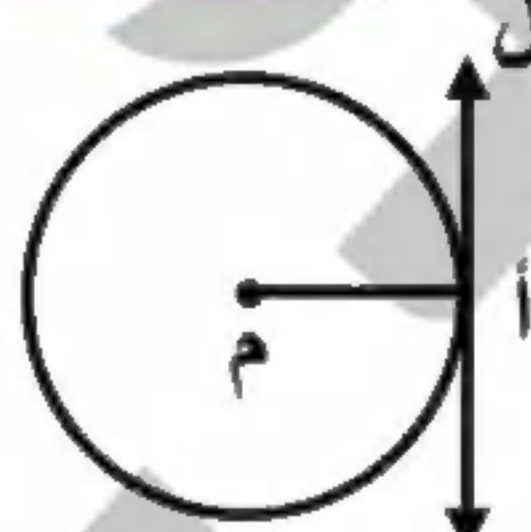
قاطع للدائرة



إذا كان : م أ > نق

$$\begin{aligned} \vec{L} \cap \text{الدائرة م} &= \{ \text{س} , \text{ص} \} \\ \vec{L} \cap \text{سطح م} &= \overline{\text{س ص}} \end{aligned}$$

مماس للدائرة

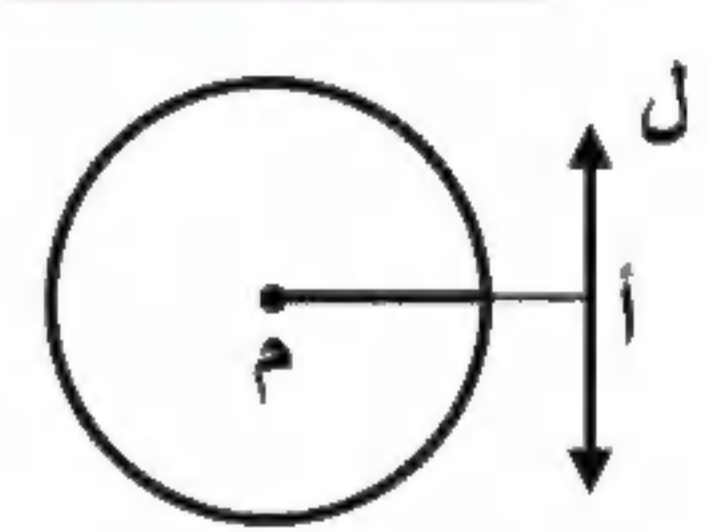


أ : نقطة التماس

إذا كان : م أ = نق

$$\begin{aligned} \vec{L} \cap \text{الدائرة م} &= \{ \text{أ} \} \\ \vec{L} \cap \text{سطح م} &= \{ \text{أ} \} \end{aligned}$$

خارج الدائرة



إذا كان : م أ < نق

$$\begin{aligned} \vec{L} \cap \text{الدائرة م} &= \emptyset \\ \vec{L} \cap \text{سطح م} &= \emptyset \end{aligned}$$

تدريب

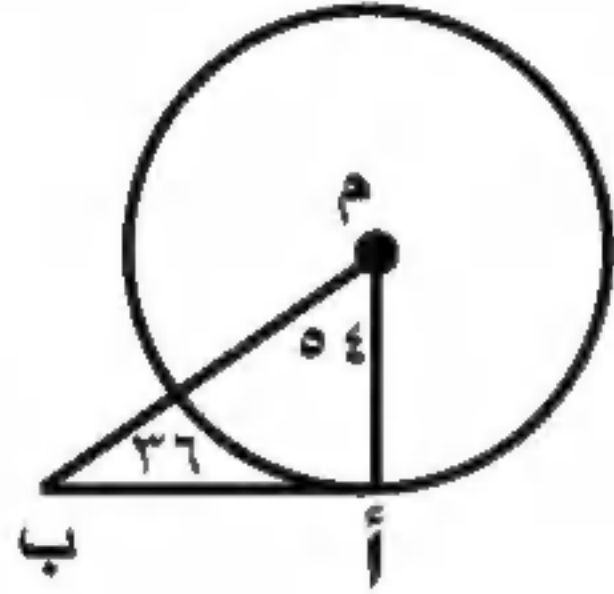
إذا كانت م دائرة طول قطرها ٨ سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإن المستقيم ل يكون

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة في المستوى بحيث م أ = ٤ سم فإن أ تقع الدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، والمستقيم ل مماس ، فإن المستقيم ل يبعد عن مركزها سم

حقائق على المماس

٢ لإثبات أن المستقيم مماس هنثبت أنه عمودي على نق
أي أن الزاوية التي بينه وبين نصف القطر قياسها ٩٠



تدريب في الشكل المقابل
اثبت أن AB مماس

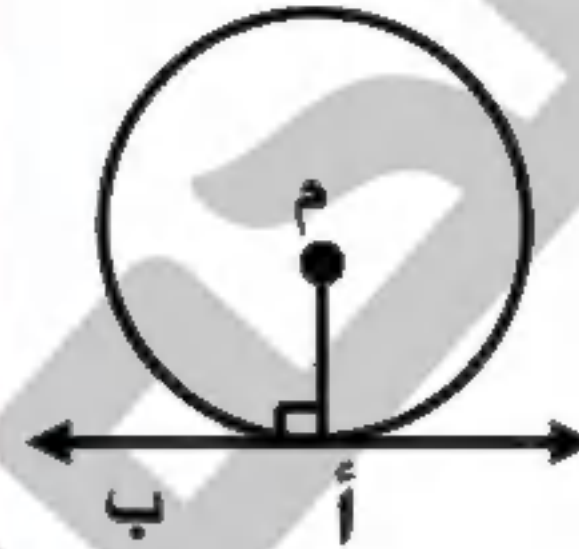
في $\triangle MAB$:

$$\angle MAB = 180 - (54 + 36) = 90^\circ$$

$\therefore AB$ مماس

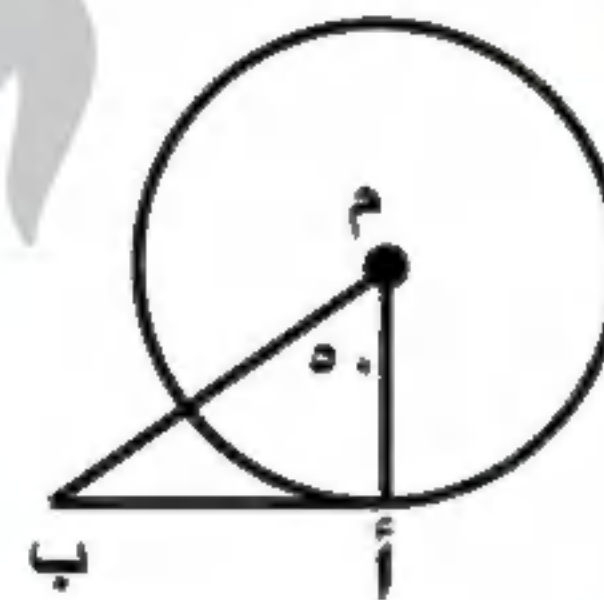
الحل

١ المماس عمودي على نصف القطر
المرسوم من نقطة التماس



$\therefore AB$ مماس ، $MA \perp AB$
 $\therefore \angle MAB = 90^\circ$

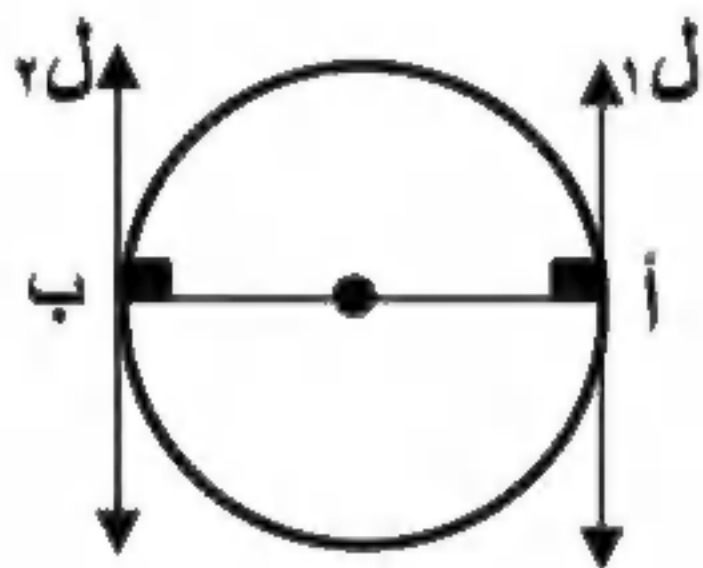
تدريب



في الشكل المقابل :
AB مماس للدائرة
أوجد $\angle B$

الحل

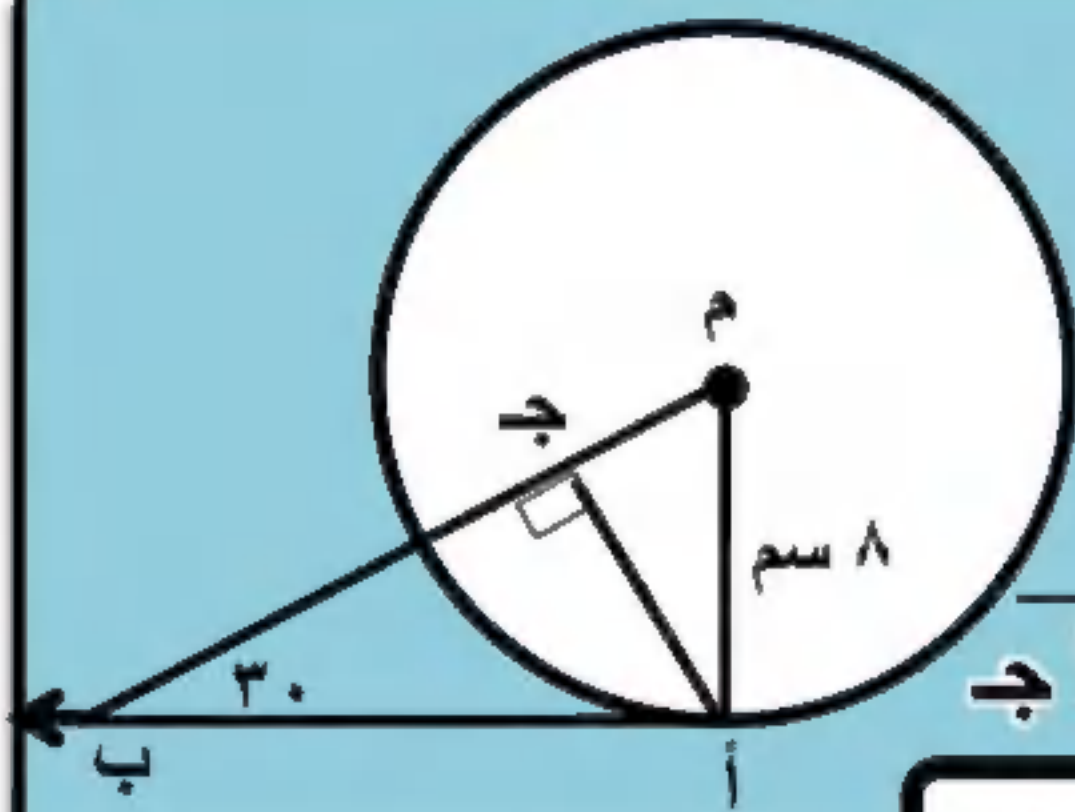
٣ المماسان المرسومان من نهايتي قطر متوازيان



$\therefore AB$ قطر
، l_1 ، l_2 مماسان
 $\therefore l_1 \parallel l_2$

ملحوظة : المماسان المرسومان من نهايتي وتر متقاطعان

مثال ٢



AB مماس للدائرة عند A
 $MA = 8$ سم
 $\angle B = 30^\circ$
أوجد طول كل من AB ، AJ

الحل

$\therefore AB$ مماس $\therefore MA \perp AB$ $\therefore \triangle MAB$ قائم

$$\angle B = 30^\circ \therefore \angle MAB = 90^\circ \therefore \angle AMB = 60^\circ$$

من فيثاغورث : في $\triangle MAB$

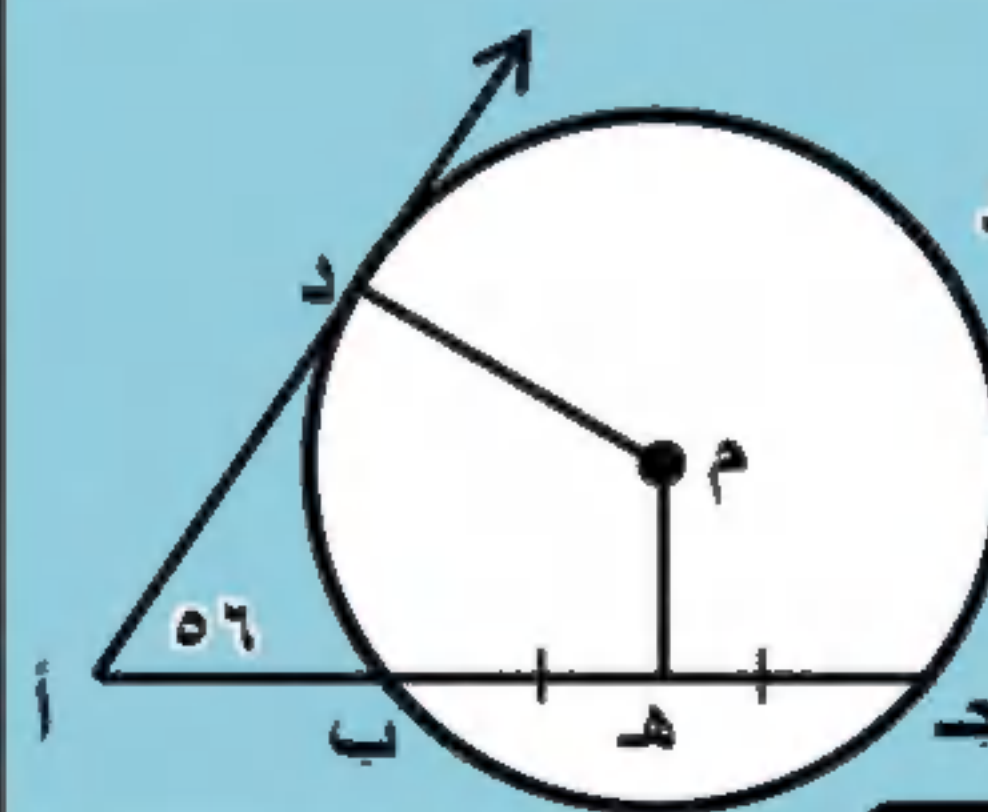
$$AB^2 = MB^2 - MA^2 = 16^2 - 8^2 = 192 \therefore AB = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

في $\triangle ABJ$: $\therefore AJ$ هو الضلع المقابل للزاوية 30°

$$\therefore AJ = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

ملحوظة: يمكن حساب AJ باستخدام نظرية اقليدس

مثال ١



AD مماس للدائرة عند A
H منتصف BD
 $\angle A = 56^\circ$
أوجد $\angle D$ و $\angle H$

الحل

$\therefore AD$ مماس ، $MA \perp AD$ $\therefore \angle MAD = 90^\circ$

$$\angle A = 56^\circ \therefore \angle MAD = 90^\circ$$

$\therefore H$ منتصف BD $\therefore MH \perp BD$

$$\angle H = 90^\circ$$

\therefore مجموع قياسات الشكل الرباعي MADH = 360°

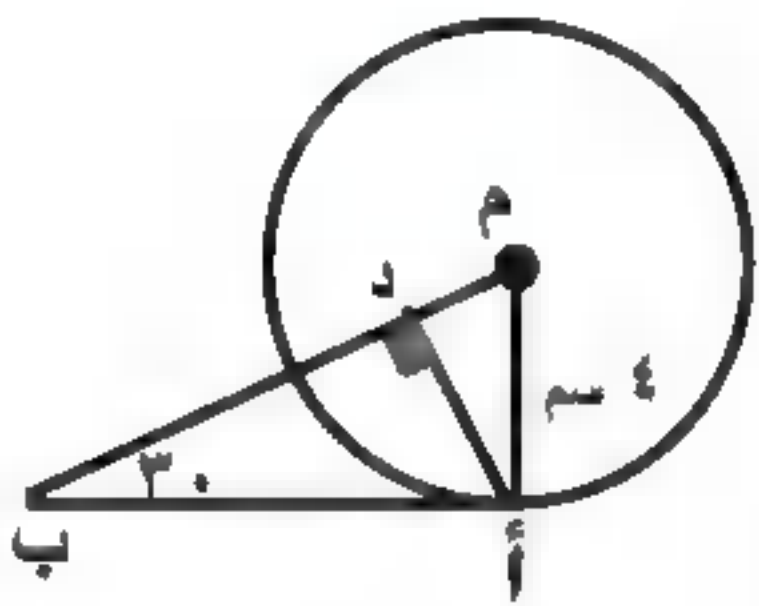
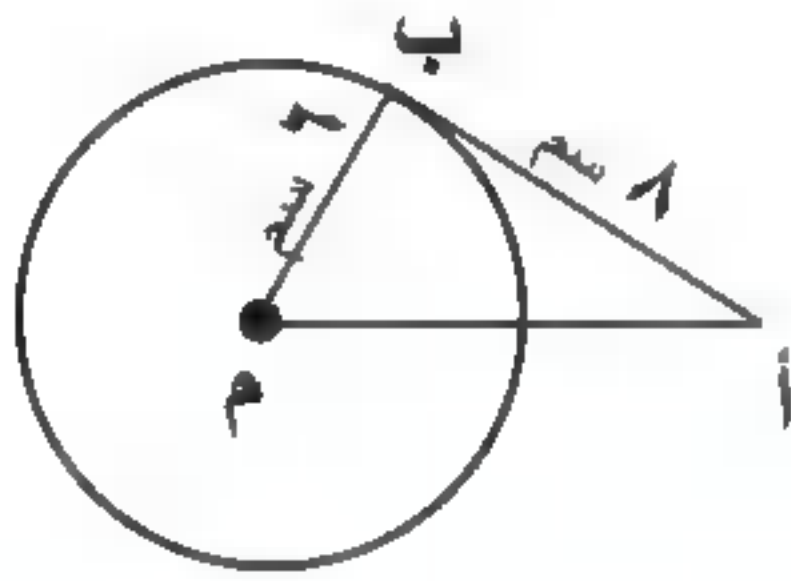
$$\therefore \angle D = 360 - (90 + 90 + 56) = 124^\circ$$

$$124^\circ = 236 - 360 = 124^\circ$$

تمارين

اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

- 1 إذا كانت نقطة تقع على الدائرة م التي قطرها ٦ سم فإن أ م = سم (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)
- 2 المماس لدائرة طول نصف قطرها ٥ سم يكون على بعد سم من مركزها (صفر ، ٣ ، ٥ ، ١٠)
- 3 وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها سم (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨)
- 4 إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ فإن المستقيم ل يكون (محور تماثل ، خارج الدائرة ، قاطع للدائرة ، مماس للدائرة)
- 5 دائرة محيطها ٦ π سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم ل يكون (مماس للدائرة ، خارج الدائرة ، قاطع للدائرة ، قطر)
- 6 في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة م م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم فإن أ م = سم (٥ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٣)



أكمل:

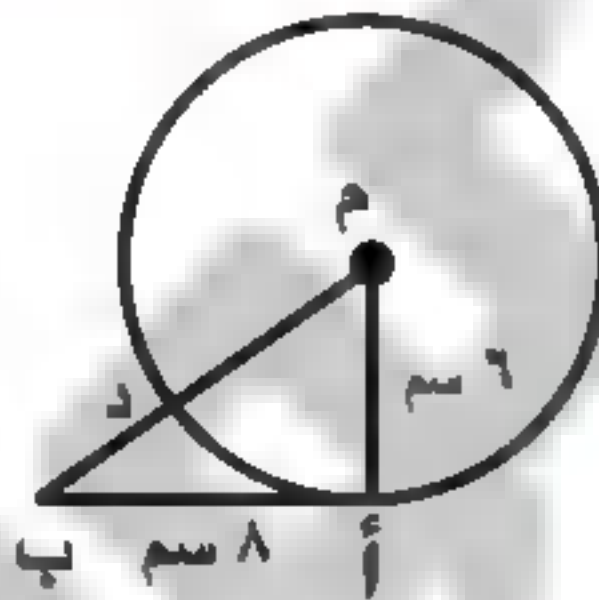
ق (م أ ب) =

م ب =

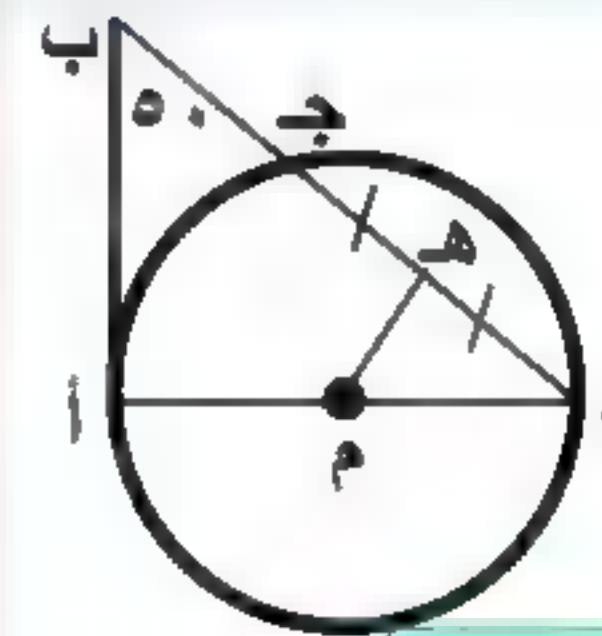
أ ب =

ق (م) =

أ د =

أ ب مماس
أوجد طول د ب

الحل

أ ب مماس ، د أ قطر
هـ منتصف ج د

ق (ب) = ٥٠°

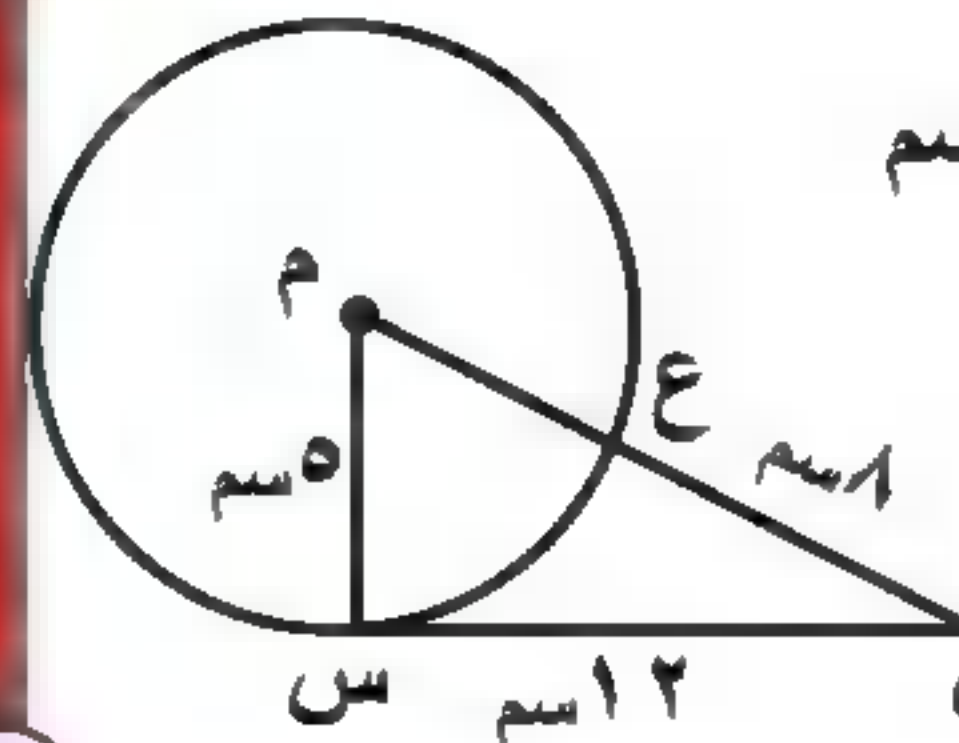
أوجد: ق (أ م هـ)

الحل

الحل

في الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم



ص ع = ٨ سم ،

ص س = ١٢ سم

اثبت أن س ص مماس

أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة

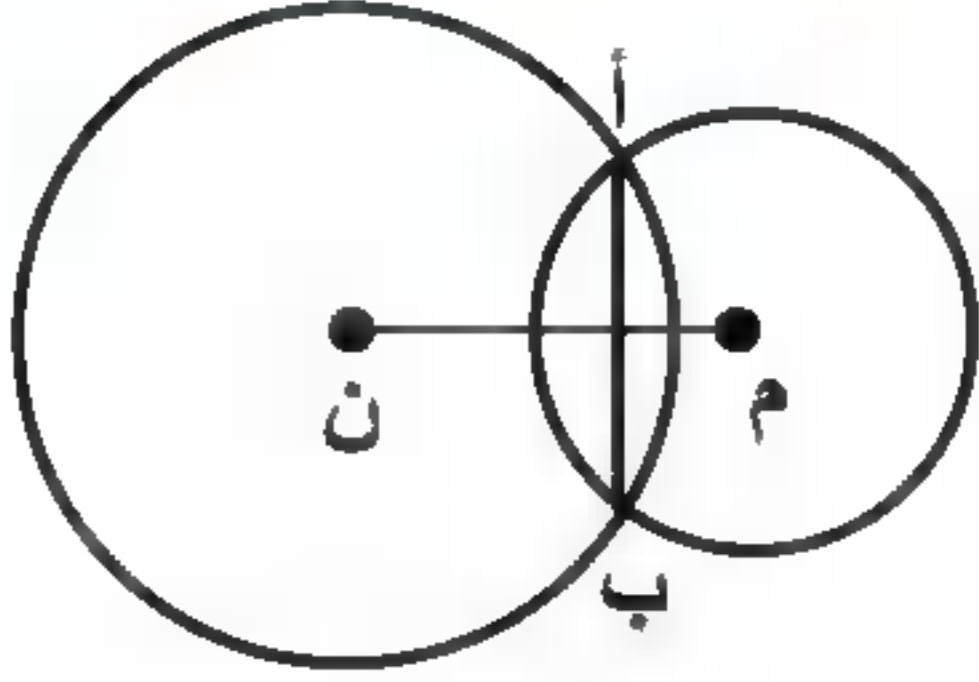
الدرس
الثالث

3

إذا كانت م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ ، م ن خط المراكز فإن الدائرتان تكونان :

متقاطعتان

٣



* $نق_1 - نق_2 > م ن > نق_1 + نق_2$

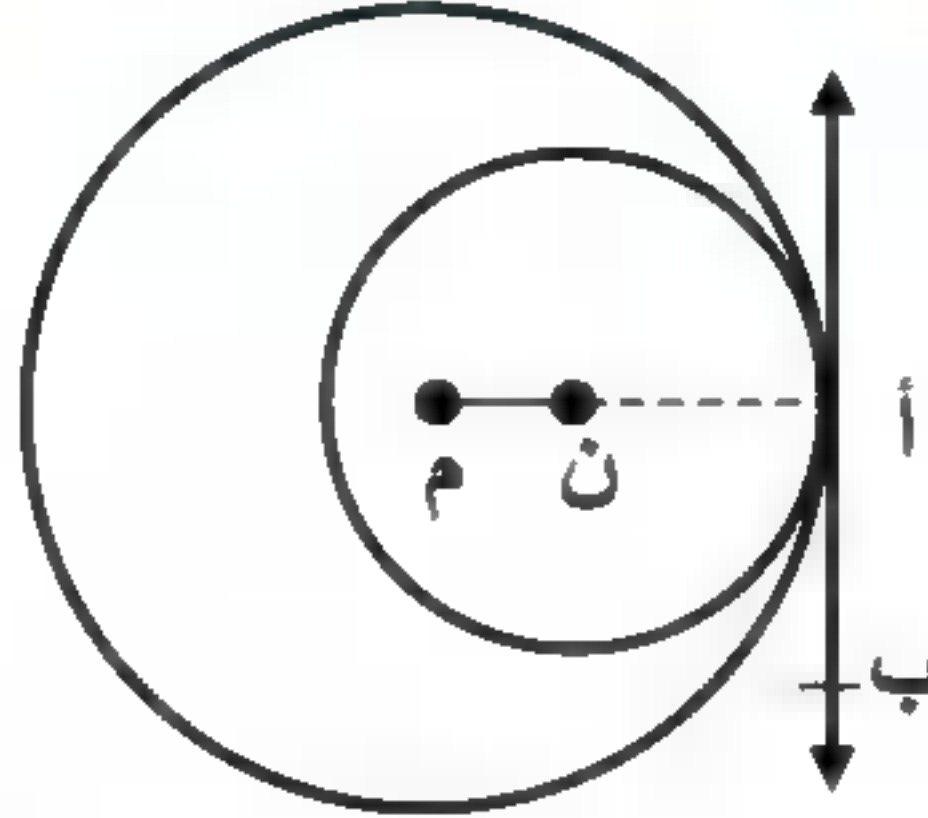
الطرح $> م ن > المجموع$

* الدائرة م \cap الدائرة ن = { أ ، ب }

* أ ب يسمى وتر مشترك

متماسستان من الداخل

٢



* إذا كان : $م ن = نق_1 - نق_2$

م ن = الطرح

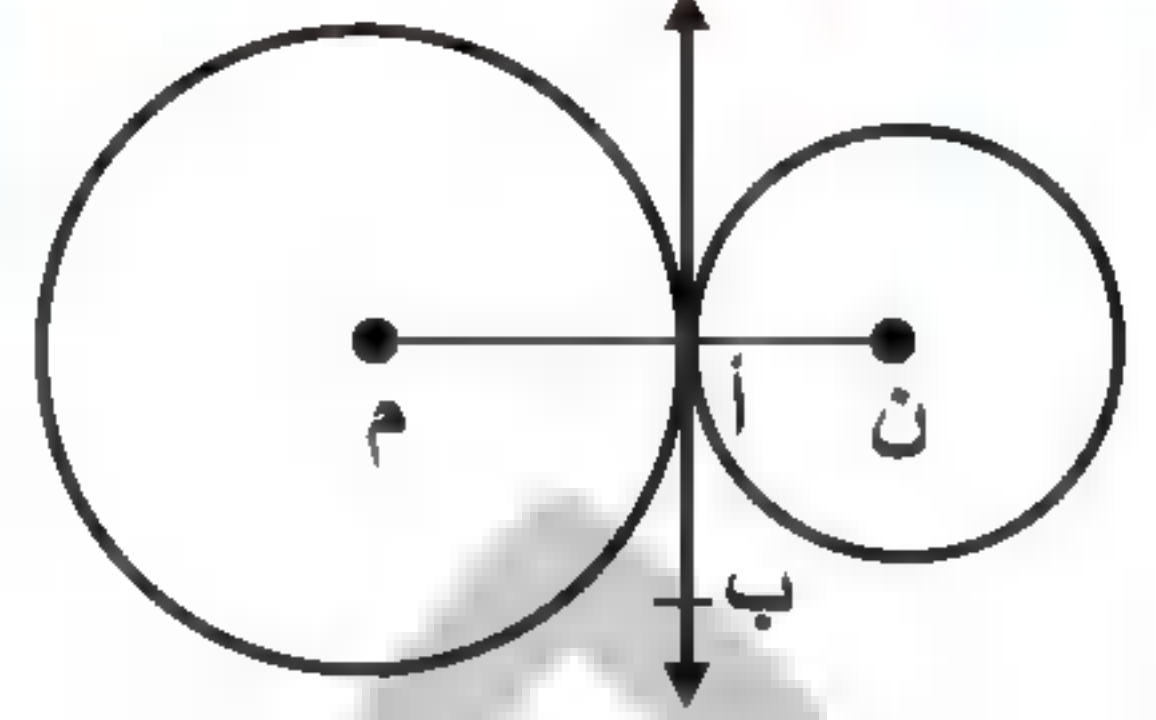
* الدائرة م \cap الدائرة ن = { أ }

* سطح م \cap سطح ن = سطح ن

* أ ب يسمى مماس مشترك

متماسستان من الخارج

١



* إذا كان : $م ن = نق_1 + نق_2$

م ن = المجموع

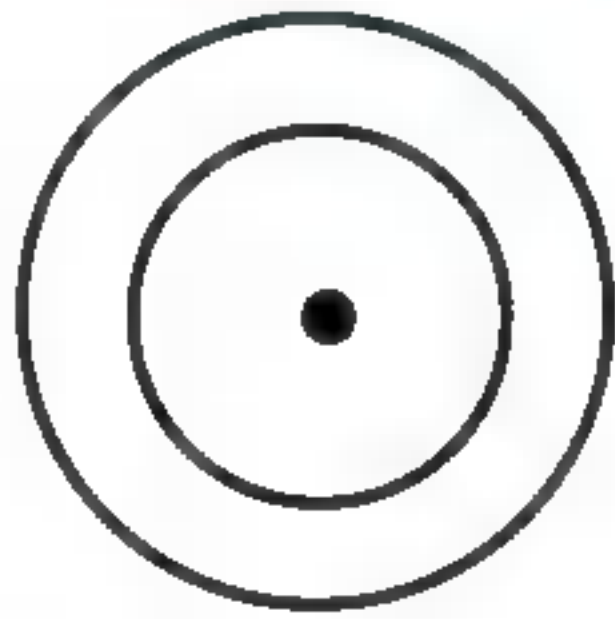
* الدائرة م \cap الدائرة ن = { أ }

* سطح م \cap سطح ن = { أ }

* أ ب يسمى مماس مشترك

متحدة المركز

٦



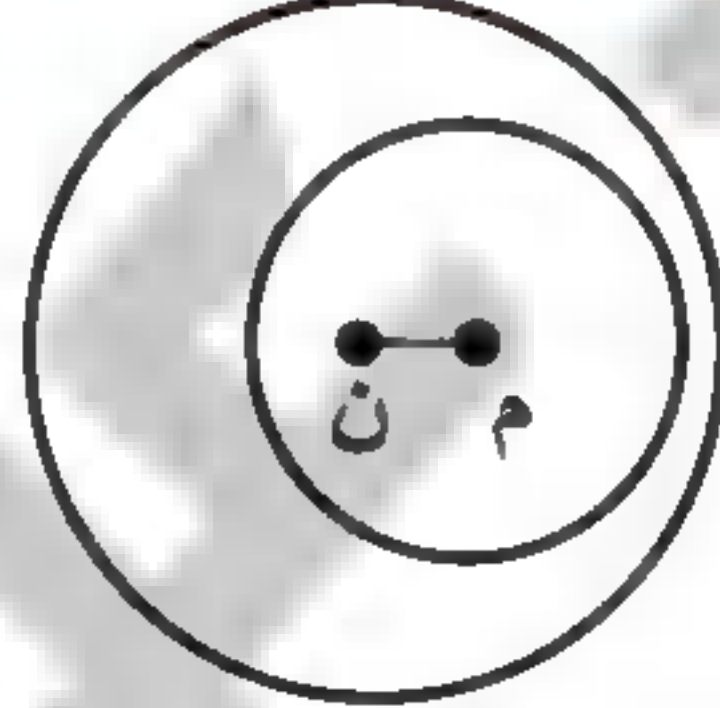
* إذا كان : $م ن = صفر$

* الدائرة م \cap الدائرة ن =

* سطح م \cap سطح ن = سطح م

متداخلتان

٥



* $م ن > نق_1 - نق_2$

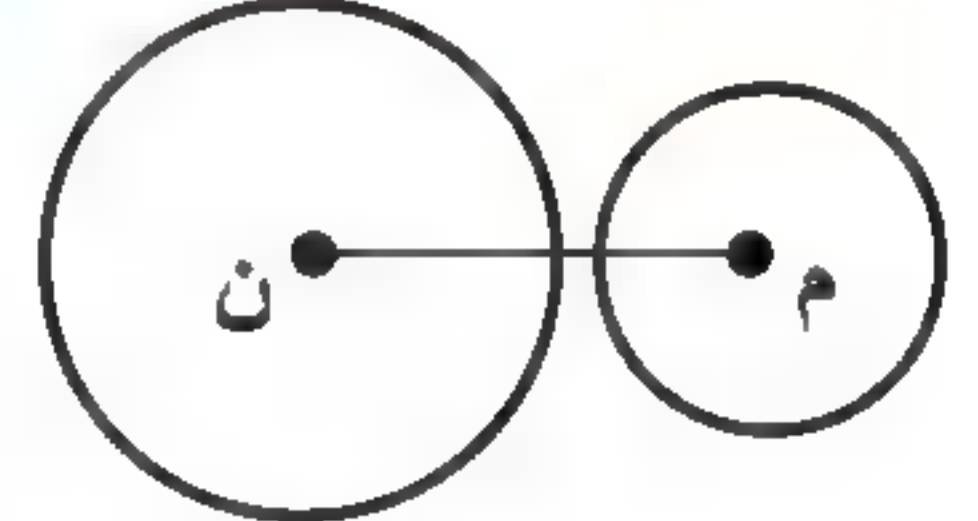
م ن > الطرح

* الدائرة م \cap الدائرة ن = Φ

* سطح م \cap سطح ن = سطح م

متباعدتان

٤



* إذا كان : $م ن < نق_1 + نق_2$

م ن < المجموع

* الدائرة م \cap الدائرة ن = Φ

* سطح م \cap سطح ن = Φ

ملحوظة : عشان تحدد وضع الدائرتان اجمع $نق_1 + نق_2$ والطرح $نق_1 - نق_2$ وقارنهم بخط المراكز

تدريب

م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما ٩ سم ، ٥ سم حدد موضع الدائرتان عندما :

١- م ن = ١٤ سم

٢- م ن = ٤ سم

الدائرتان

الدائرتان

٣- م ن = ٣ سم

٤- م ن = ١٦ سم

٥- م ن = صفر

الدائرتان

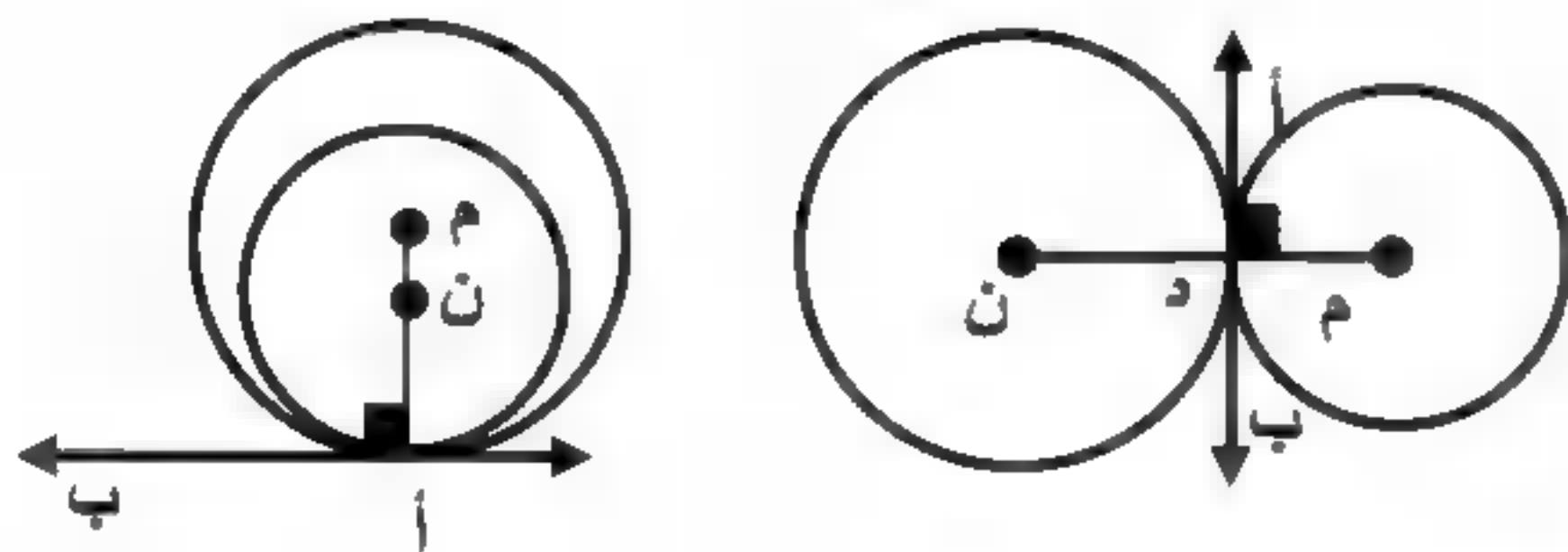
الدائرتان

نتائج هامة على خط المركزين



٢ في الدائرتان المتماستان

خط المركزين عمودي على المماس المشترك

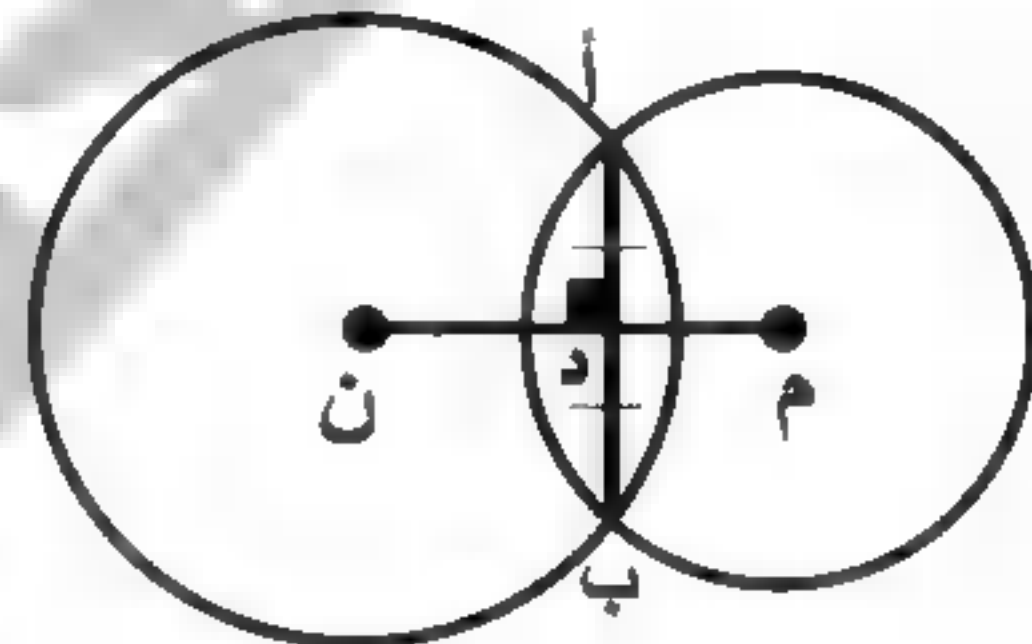


∴ AB مماس مشترك ، M ن خط المركزين
 ∴ MN ⊥ AB ∴ ∠(M A N) = 90°



١ في الدائرتان المتقاطعتان

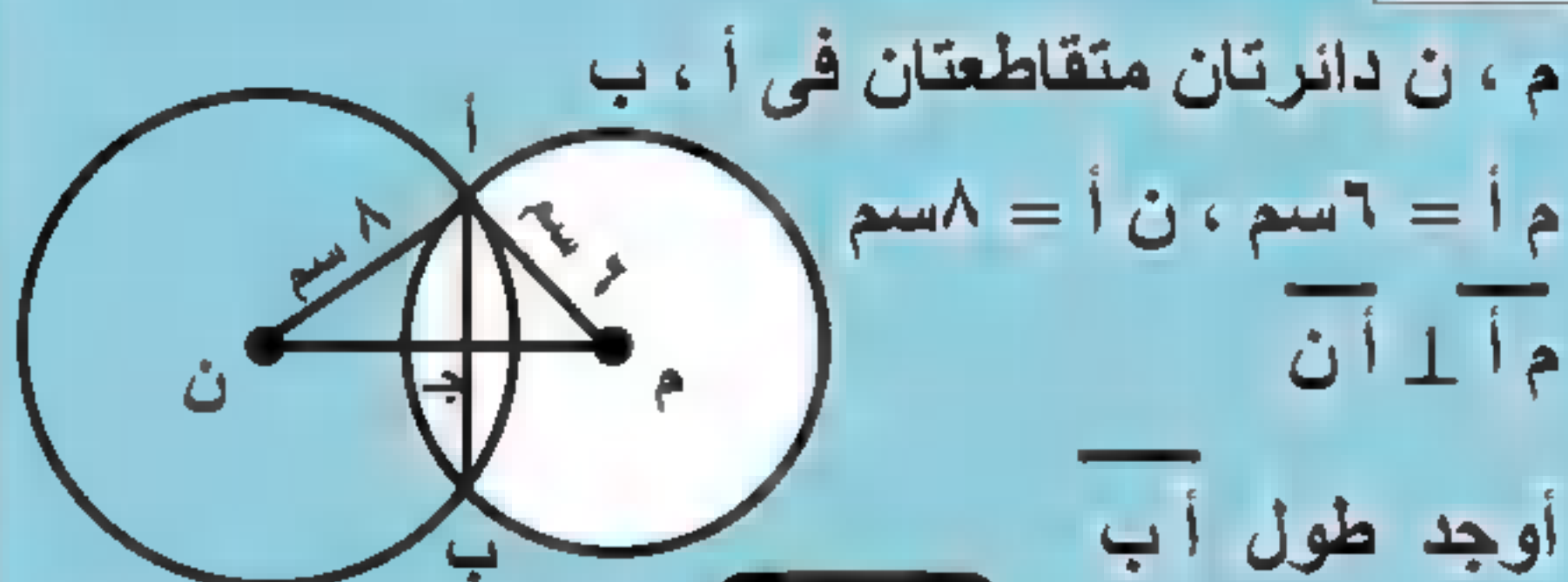
خط المركزين عمودي على الوتر المشترك وينصفه



∴ AB وتر مشترك ، M ن خط المركزين
 ∴ MN ⊥ AB ∴ ∠(M A N) = 90°
 ، M ن ينصف AB ∴ AD = DB

تصميم محمود عوض م
 معلم رياضيات

مثال ٢



الحل

في Δ AMN (من فيثاغورث) :

$$\because MA \perp MN \therefore (MN)^2 = MA^2 - AD^2 = 8^2 - 6^2 = 100$$

$$\therefore MN = 10 \text{ سم}$$

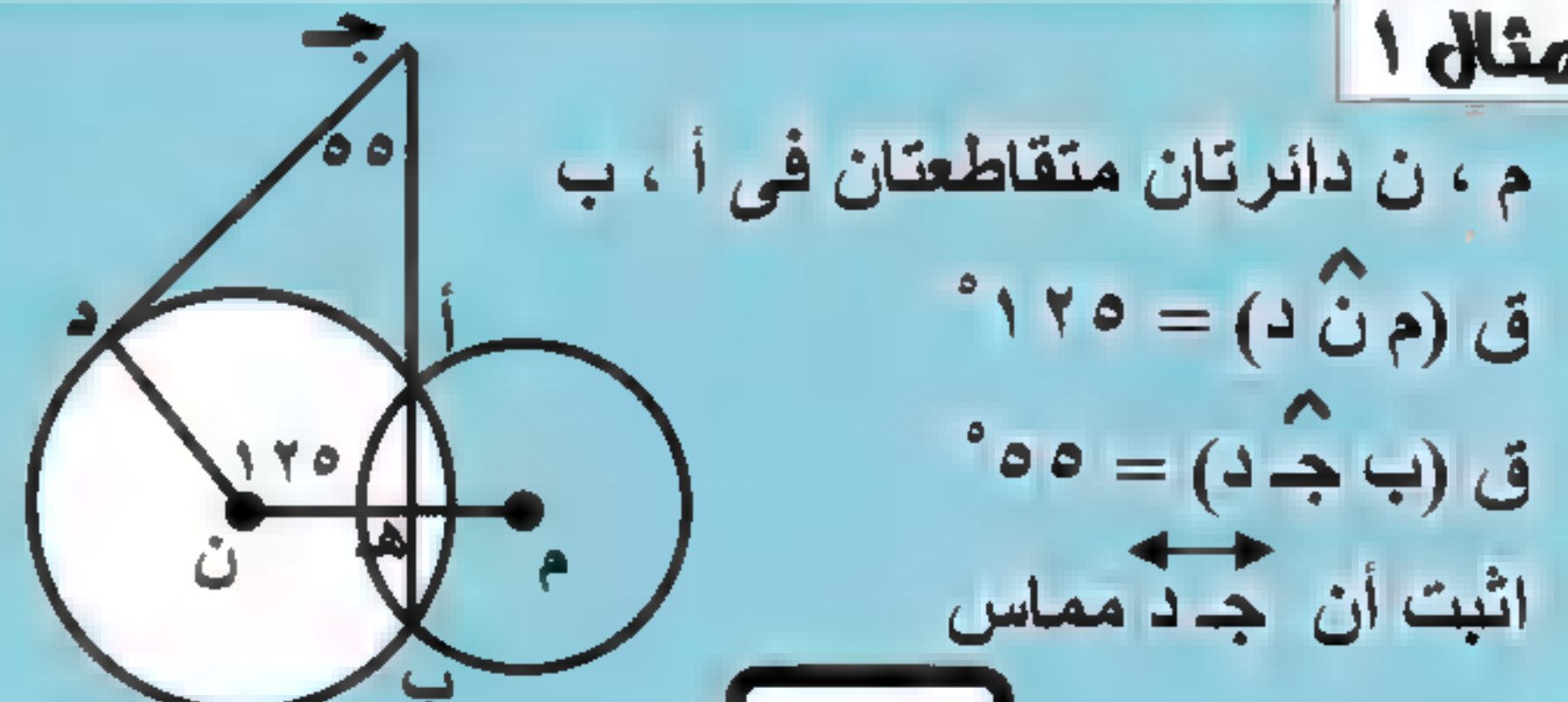
∴ AB وتر مشترك ∴ MN ⊥ AB

$$\text{مع إقليدس : } AD = \frac{AM \times AN}{MN} = \frac{8 \times 6}{10} = 4,8 \text{ سم}$$

∴ AB وتر مشترك ∴ MN ينصف AB

$$\therefore AB = 4,8 \times 2 = 9,6 \text{ سم}$$

مثال ١



الحل

∴ AB وتر مشترك ، M ن خط المركزين
 ∴ AB ⊥ MN ∴ ∠(A H N) = 90°

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

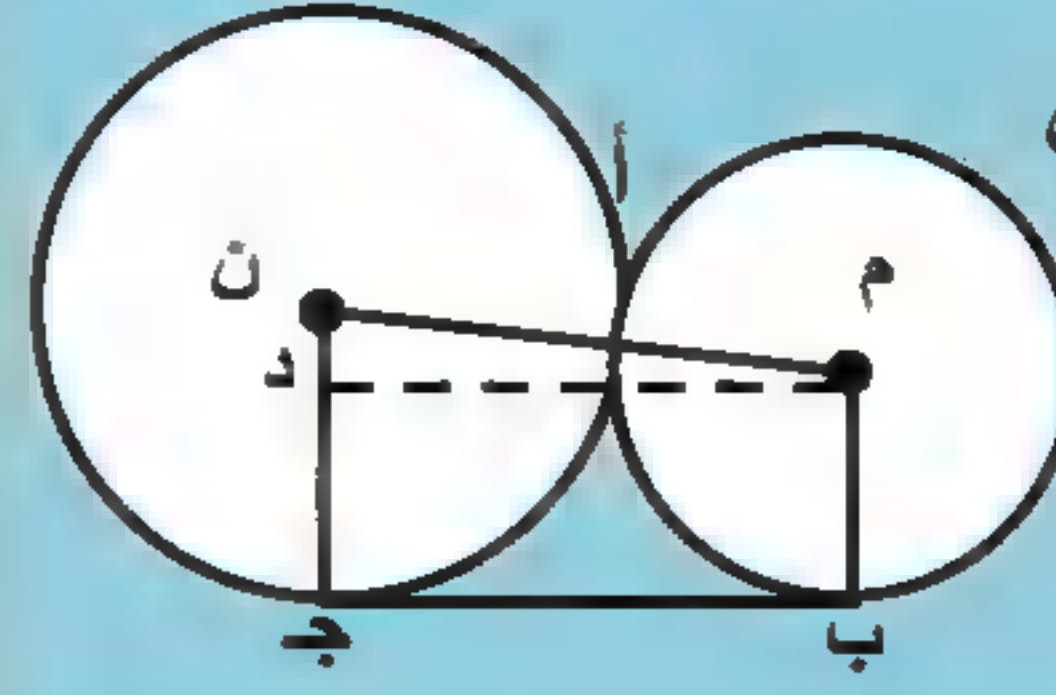
$$\therefore \angle(D) = (90 + 55 + 125) - 360 = 90^\circ$$

$$\therefore ND \perp BD$$

$$\therefore BD \text{ مماس}$$

(وهو المطلوب اثباته)

مثال ٣



م ، ن دائرتان متماستان
ب ج مماس مشترك
م ب = ٥ سم ،
ن ج = ٨ سم
أوجد طول ب ج

الحل

العمل : نرسم م د \perp ن ج

ب ج مماس مشترك \therefore م ب \perp ب ج ، ن ج \perp ب ج

\therefore الشكل م ب ج د مستطيل

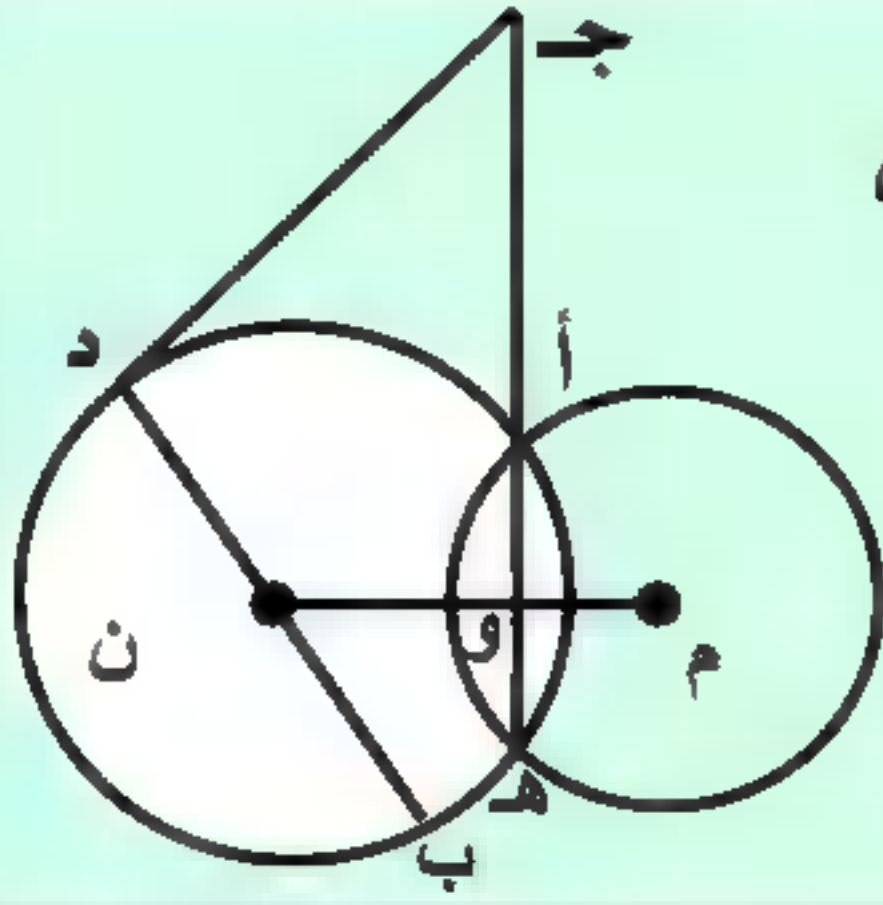
\therefore د ج = م ب = ٥ سم \therefore ن د = ٨ - ٥ = ٣ سم

م ن = ٨ + ٥ = ١٣ سم ومن فيثاغورث في Δ م د ن :

$$(م د)^2 = ١٦٩ - ٩ = ١٦٠$$

$$م د = \sqrt{١٦٠} = ٤\sqrt{١٠} ، ب ج = \sqrt{١٦٠} = ٤\sqrt{١٠}$$

مثال ٤



م ، ن دائرتان متقاطعتان
ج د مماس
د ب قطر
اثبت أن :
ق (و ن ب) = ق (ج د)

الحل

\therefore أ ب وتر مشترك \therefore م ن \perp أ ب
 \therefore ق (أ و ن) = ٩٠

\therefore ج د مماس \therefore ج د \perp د ن \therefore ق (د) = ٩٠

في الشكل الرباعي ج و ن د ينتج أن :

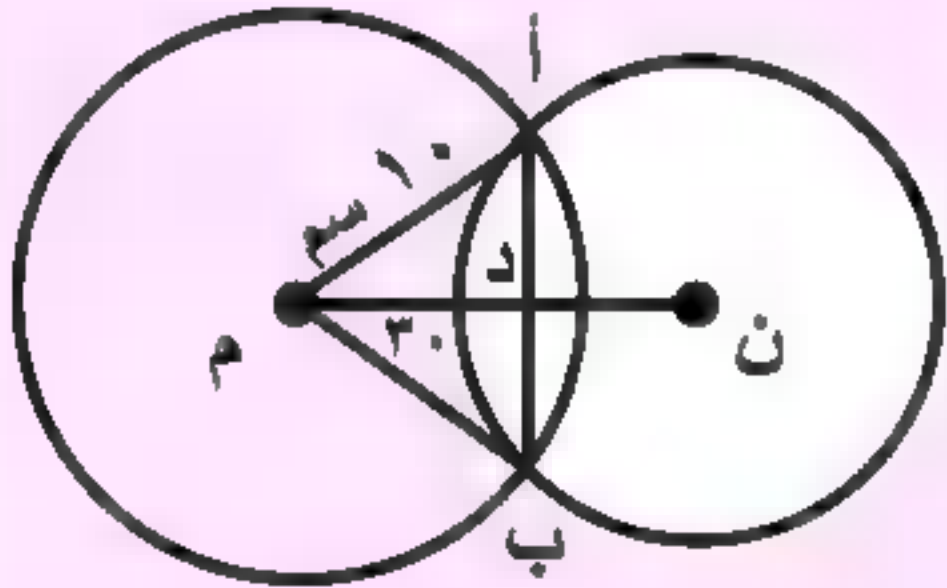
$$ق (و ن د) + ق (ج د) = ١٨٠ \leftarrow ١$$

$$\therefore ق (و ن د) + ق (و ن ب) = ١٨٠ \leftarrow ٢ \text{ زاوية مستقيمة}$$

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ج د) = ق (و ن ب)

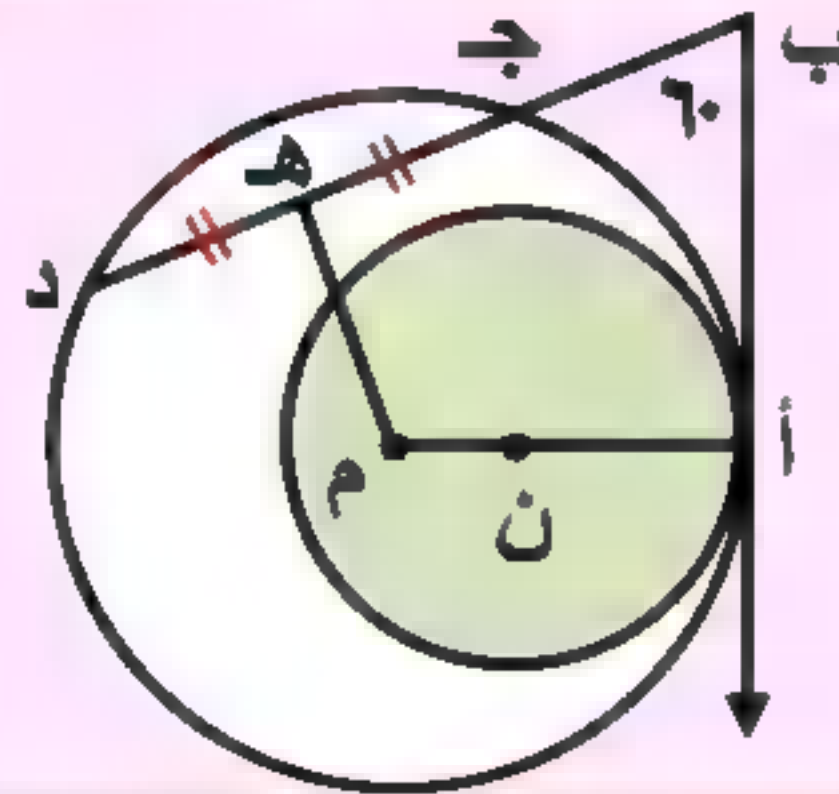
تدريبات

تدريب ٢



م ، ن دائرتان متقاطعتان
م أ = ١٠ سم
ق (ب م ن) = ٣٠°
أوجد طول أ ب

تدريب ١



م ، ن دائرتان متماستان
هـ منتصف ج د
ق (ب) = ٦٠°
أوجد ق (أ م هـ)

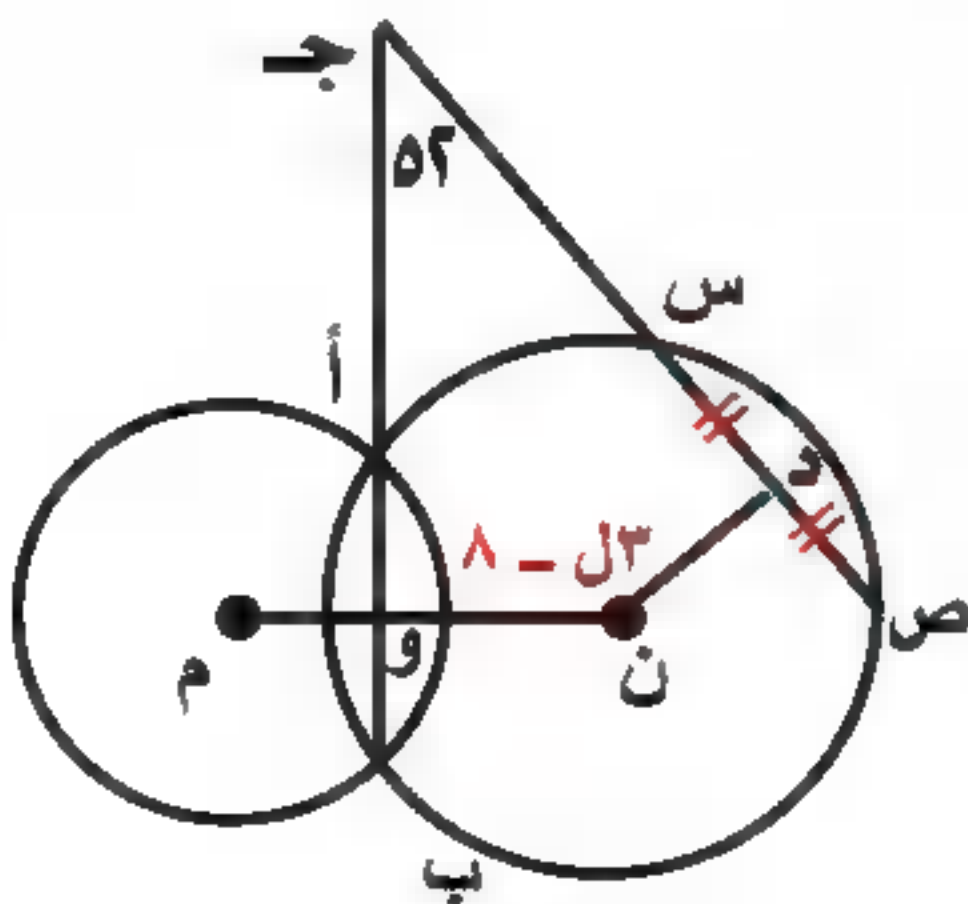
الحل

تمارين

- ① خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على وينصفه
(أ) القطر (ب) الوتر (ج) الوتر المشترك (د) المماس
- ② دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، أنصاف أقطارهم ٥ سم ، ٩ سم فإن م ن = سم
(أ) ١٤ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٩
- ③ م ، ن دائرتان متقاطعتان وطولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن م ن =
(أ) [٧ ، ٣] (ب) [٧ ، ٣] (ج) [٧ ، ٣] (د) [٧ ، ٣]
- ④ إذا كان سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = { أ } وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = سم
(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ١١ (د) ١٦
- ⑤ إذا كان الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم ، م ن = ٩ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = سم
(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ١٤
- ⑥ م دائرة طول قطرها ٧ سم ، أ نقطة في مستوى الدائرة وكان م أ = ٤ سم فإن أ تقع
(أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) على مركز الدائرة
- ⑦ م ، ن دائرتان متباعدتان طولا نصفى قطريهما ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب فإن م ن سم
(أ) > (ب) < (ج) = (د) \leq
- ⑧ محور التماثل للوتر المشترك أ ب لدائرتين متقاطعتين م ، ن هو
(أ) م أ (ب) م ب (ج) م ن (د) ن أ
- ⑨ إذا كان سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان م ، ن تكونان
(أ) متباعدتان (ب) متحدثى المركز (ج) متقاطعتان (د) متماستان من الخارج

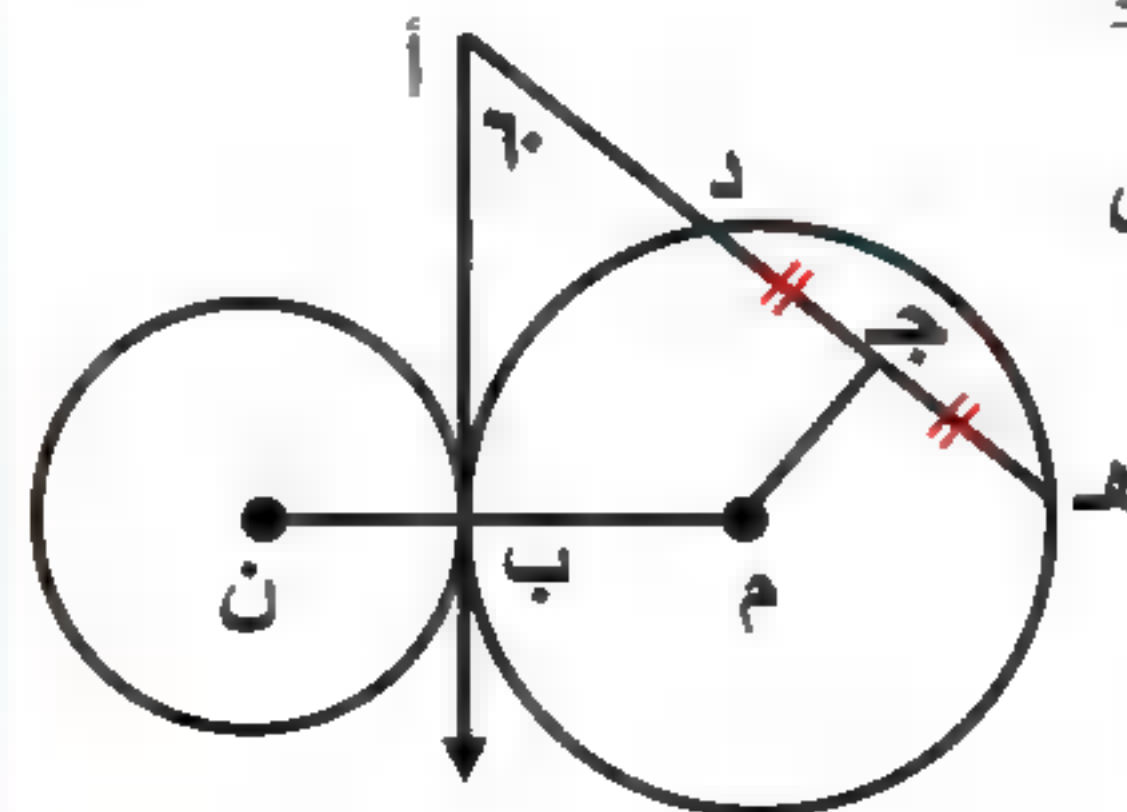
٢ في الشكل المقابل:

أوجد قيمة ل

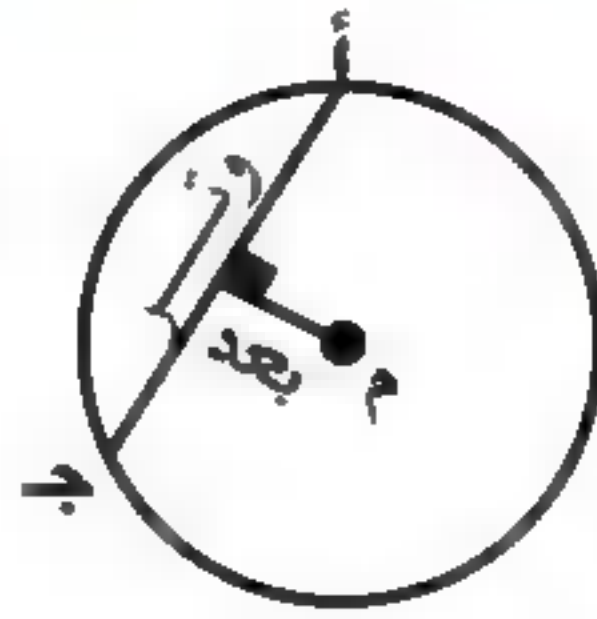


١ في الشكل المقابل:

م ، ن دائرتان متماستان
ج منتصف د ه
ق (أ) = ٦٠°
أوجد ق (ج م ب)



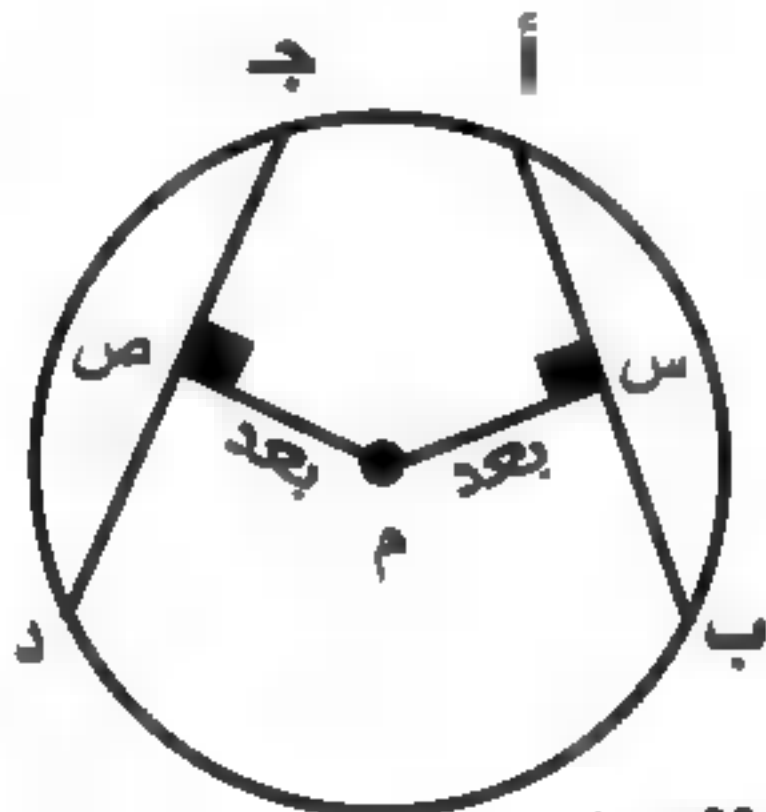
علاقة أوتار الدائرة بمركزها

الدرس
الرابع 4

البعد لازم يكون عمودي

ولو قالك انه ينصف الوتر استنتج من التنصيف انه عمودي

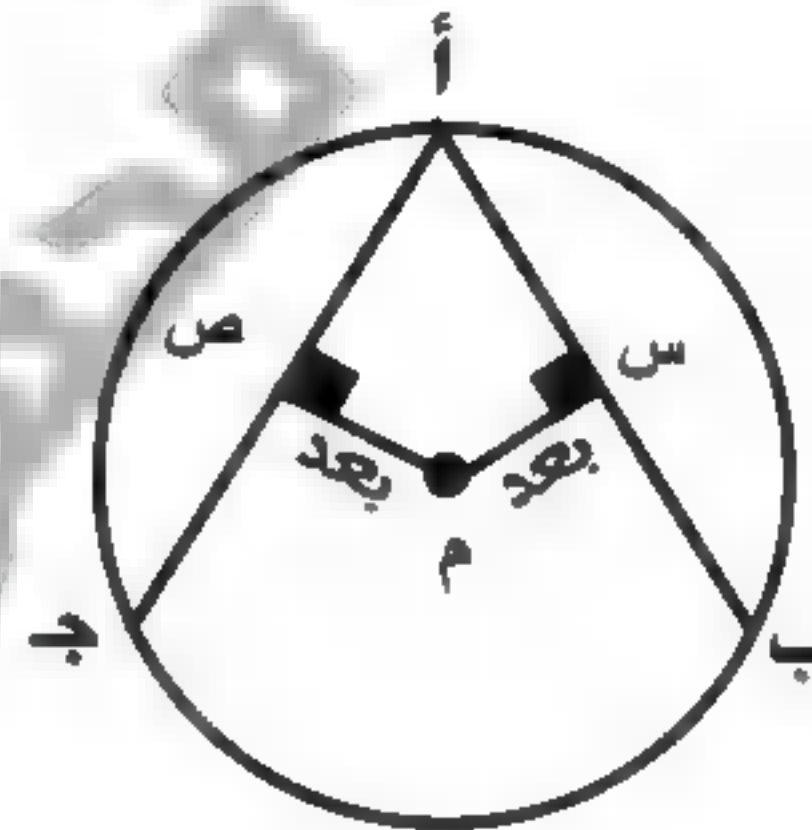
في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأبعاد متساوية
فإن الأوتار تكون متساوية∴ م س = م ص
(الأبعاد متساوية)∴ أ ب = ج د
(الأوتار متساوية)

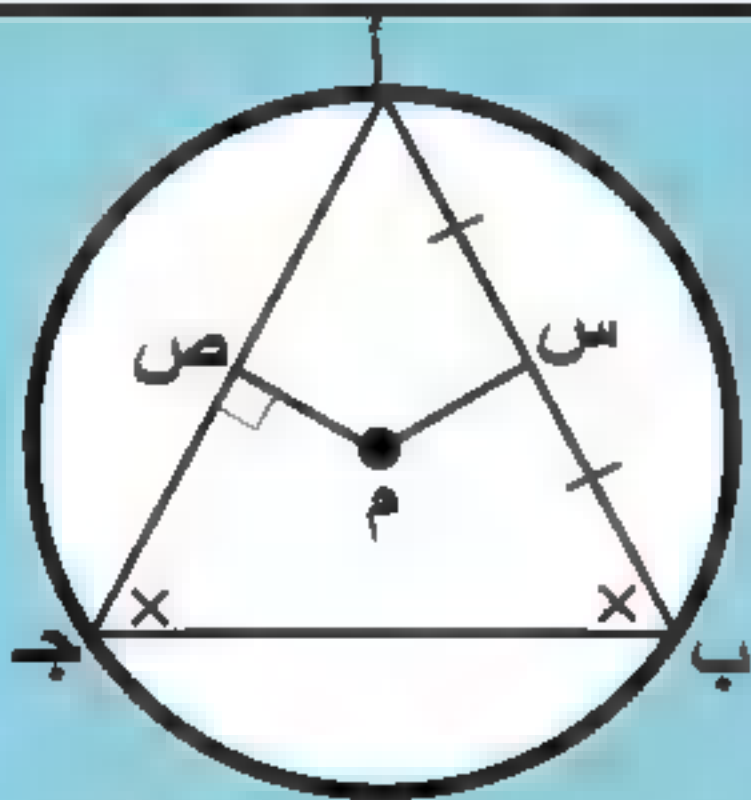
لو أعطاك وترين متساويين : استنتج ان البعدين متساويين والعكس.

ولو طلب منك تثبت ان وترين متساويين : حاول تثبت ان البعدين متساويين والعكس.

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأوتار متساوية
فإن الأبعاد تكون متساوية∴ أ ب = ج د
(الأوتار متساوية)∴ م س = م ص
(الأبعاد متساوية)

مثال ٢

أ ب ج ∆ مرسوم داخل دائرة م
ق (ب) = ق (ج)
س منتصف أ ب ، م ص ∠ أ ج
اثبت أن : م س = م ص

الحل

∴ س منتصف أ ب ∴ م س ∠ أ ب

في ∆ أ ب ج :

∴ ق (ب) = ق (ج)

∴ أ ب = ج د أوتار متساوية

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

مثال ١

مسألة من النماذج

أ ب = ج د
م د ∠ أ ب ، م هـ ∠ أ ج
اثبت أن : س د = ص هـ

الحل

∴ أ ب = ج د (أوتار متساوية)

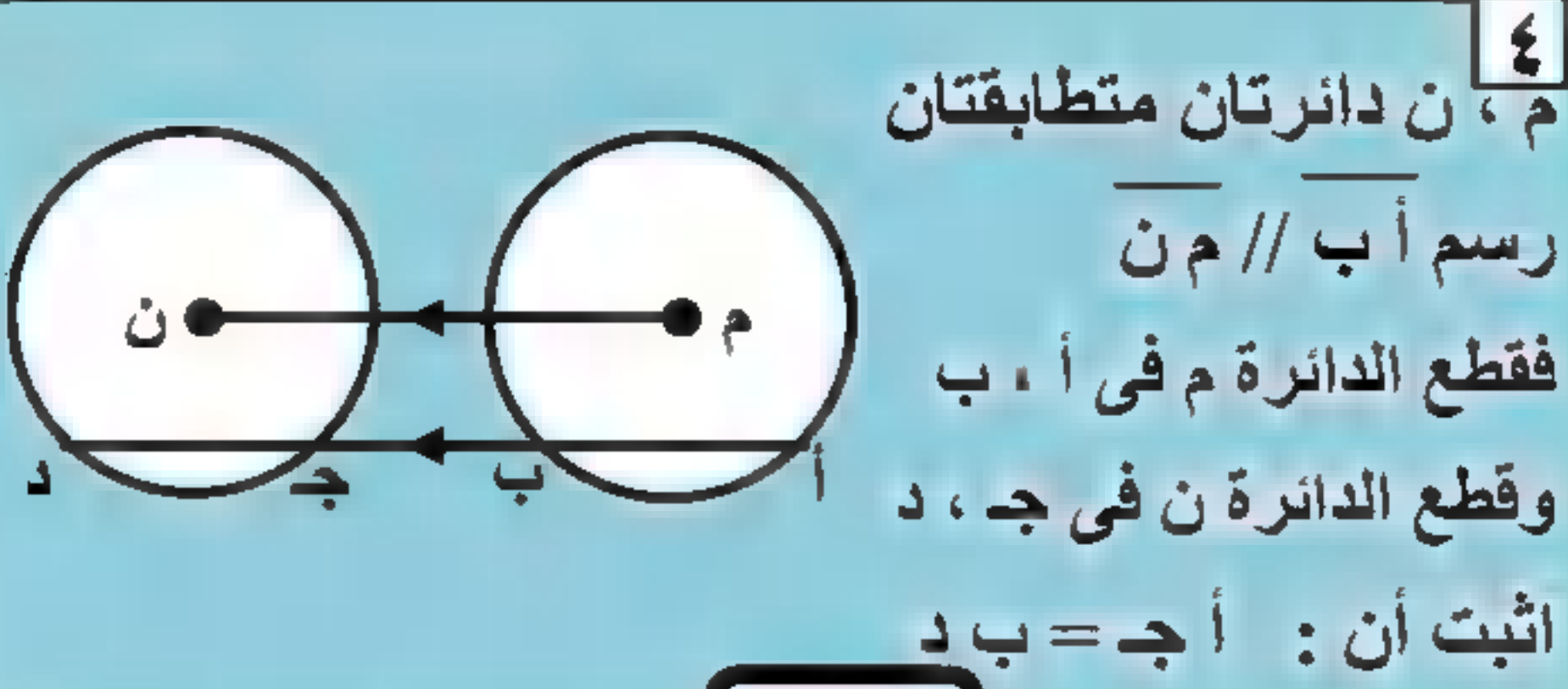
∴ م د ∠ أ ب ، م هـ ∠ أ ج

∴ م د = م هـ (١) (الأبعاد متساوية)

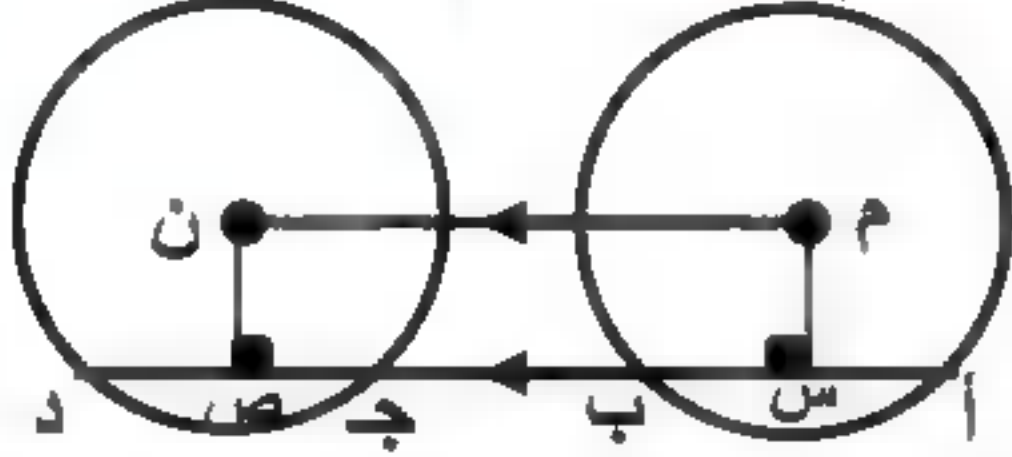
∴ م س = م ص (٢) (أنصاف أقطار)

بطرح ١ من ٢ ينتج أن :

س د = ص هـ



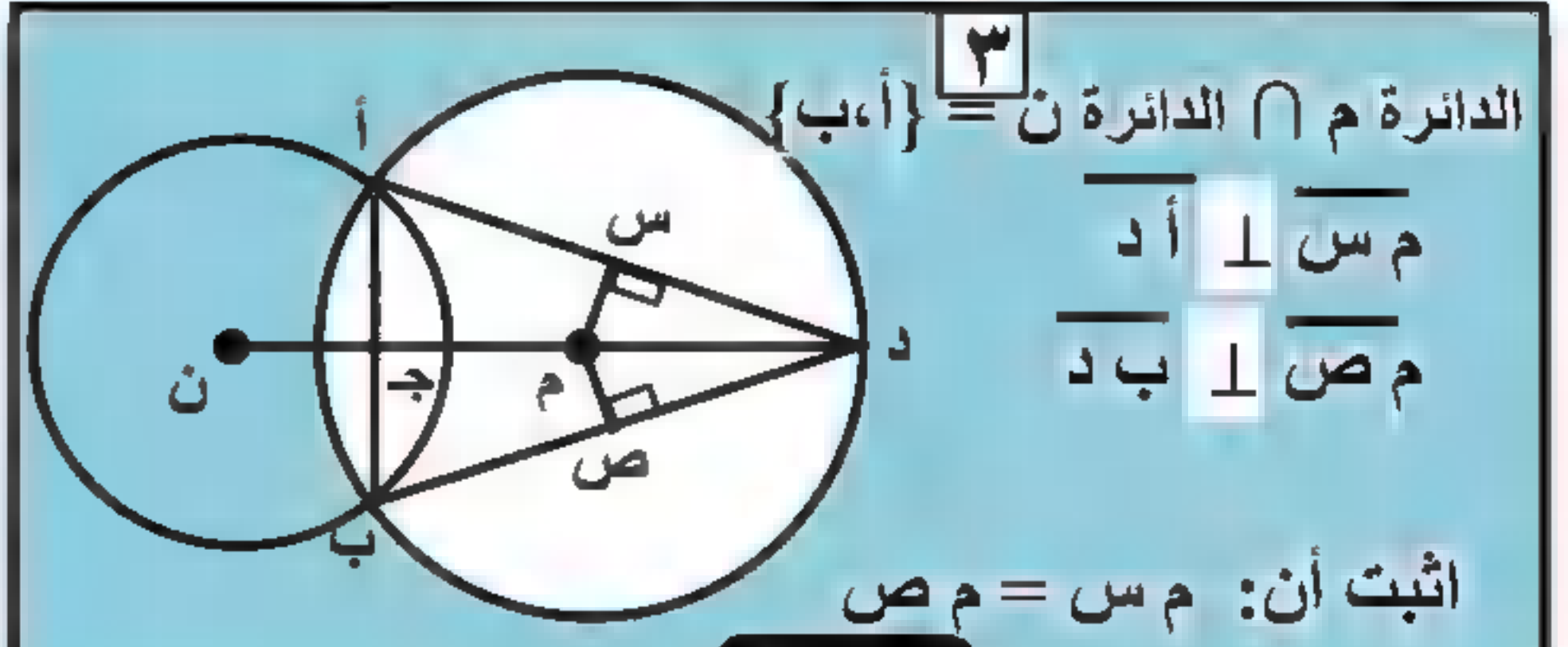
الحل

العمل: نرسم $\overline{MS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{NS} \perp \overline{CD}$ : $\overline{MN} // \overline{AB}$ ، $\overline{MS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{NS} \perp \overline{CD}$

: الشكل م س ص ن مستطيل

: $\overline{MS} = \overline{SV}$ (أبعاد متساوية): $\overline{AB} = \overline{CD}$ (الأوتار متساوية)

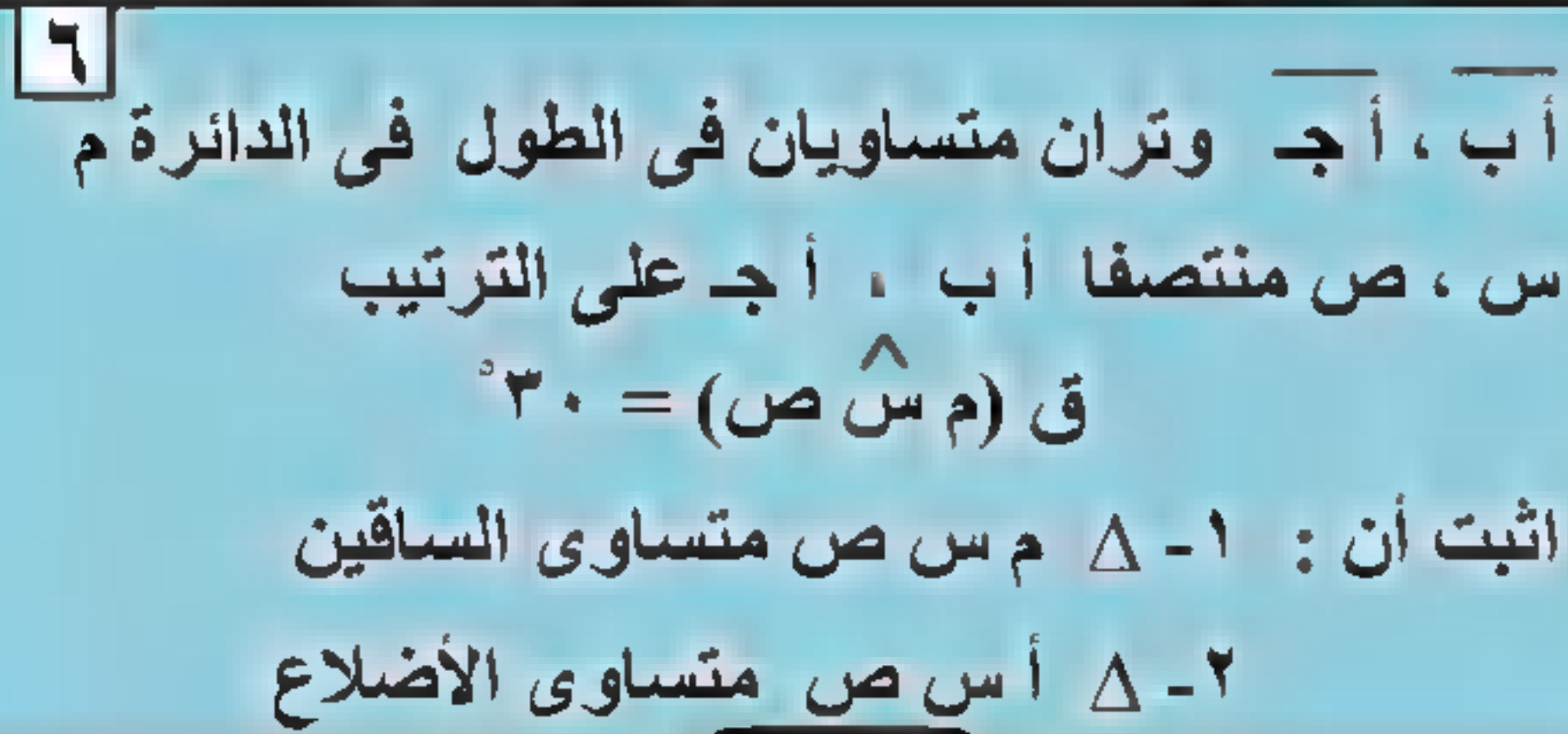
بإضافة ب ج للطرفين

: $\overline{AJ} = \overline{BD}$ هـ ط ث

الحل

: \overline{AB} وتر مشترك ، م ن خط المراكز: $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ ، ج منتصف \overline{AB} أي أنه في $\triangle DAB$: د ج محور تماثل \overline{AB} لأن د ج \perp \overline{AB} وتنصفه: $\triangle DAB$ متساوي الساقين: $\overline{DA} = \overline{DB}$ وهي أوتار متساوية

: م س = م ص (أبعاد متساوية)

ملحوظة: يمكن الإثبات عن طريق تطابق $\triangle ADJ$ ، ب د جتصميم محمود عوض م
معلم رياضيات

الحل

: $\overline{MS} \perp \overline{AB}$: $\overline{MS} \perp \overline{AB}$: $\overline{VS} \perp \overline{AC}$: $\overline{VS} \perp \overline{AC}$: $\overline{AB} = \overline{AC}$ (أوتار متساوية): $\overline{MS} = \overline{VS}$ (أبعاد متساوية): $\triangle م س ص$ متساوي الساقين: ق (م س ص) = 30° ، ق (م س أ) = 90° : ق (أ س ص) = $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$: ق (أ ص س) = 60° : ق (أ) = 60° : $\triangle أ س ص$ متساوي الأضلاع

الحل

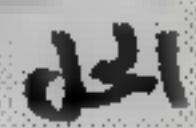
: $\triangle م س ب$ ، $\triangle م ص ج$ فيهما :: $\overline{MB} = \overline{MC}$ أنصاف أقطار: ق (م س ب) = ق (م ص ج) = 90° : ق (ب) = ق (ج) لأن $\overline{AB} = \overline{AC}$: $\triangle م س ب \cong \triangle م ص ج$

ومن التطابق ينتج أن : م س = م ص (أبعاد)

: $\overline{MS} \perp \overline{BD}$ ، $\overline{MV} \perp \overline{CH}$

: ب د = ج هـ

(1) Δ 9



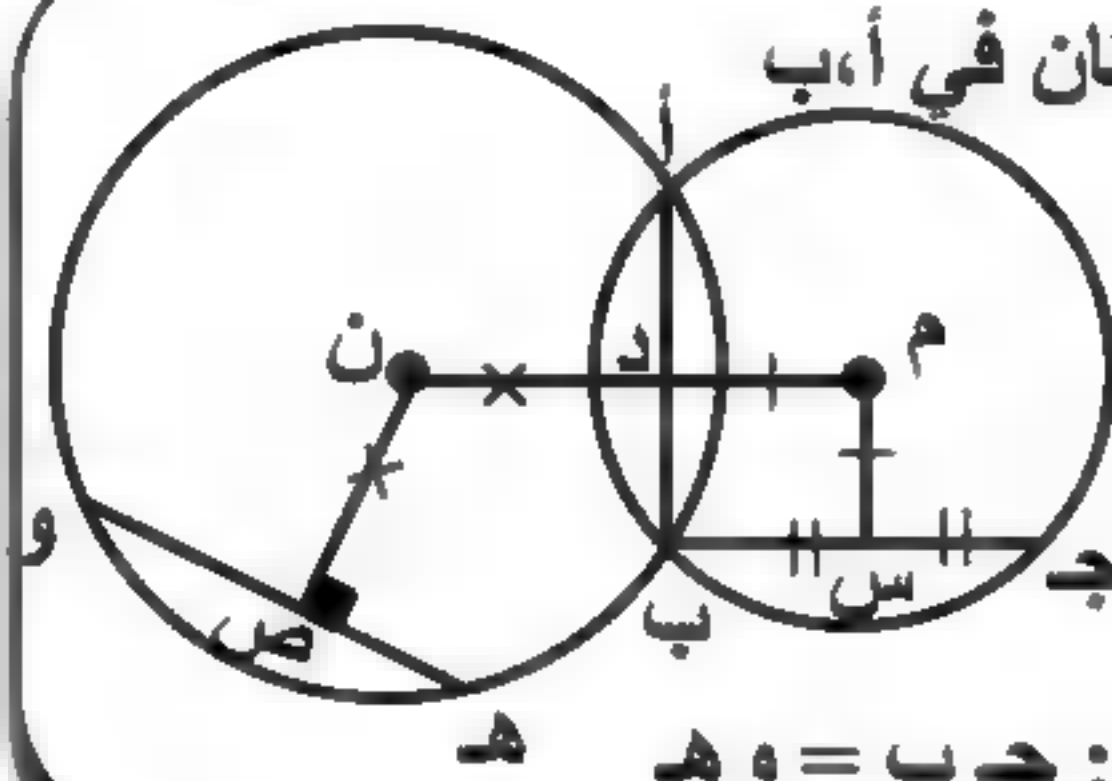
۱۲۱

اثبت أن : $أب = جد$



221

ن ص ۱ هـ و اثبت أن: ج ب = و هـ



تعيين الدائرة

الدرس
5
الخامس

تُعيّن الدائرة إذا علم : ١- مركزها ٢- طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بنقطة

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة واحدة.

رسم دائرة تمر بنقطتين

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطتين.

◆ ولكن إذا علم طول القطعة المستقيمة AB وطول نصف قطر المطلوبة فإن:

- إذا كان $NQ < \frac{1}{2} AB$ فإنه يمكن رسم دائرتان فقط.
- إذا كان $NQ = \frac{1}{2} AB$ فإنه يمكن رسم دائرة واحدة فقط وهي أصغر دائرة.
- إذا كان $NQ > \frac{1}{2} AB$ فإنه لا يمكن رسم أي دائرة.

مثال: إذا كانت AB قطعة مستقيمة طولها ٧ سم فإن أصغر دائرة يمكن أن تمر بالنقطتين A ، B طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

◆ أي ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر بها دائرة.

◆ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة وحيدة.

الدائرة الداخلة للمثلث	الدائرة الخارجة للمثلث
 <p>مركزها هو نقطة تقاطع منصفات زواياها الداخلة</p>	 <p>مركزها هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها (محاور تماثل أضلاعها)</p>

ملاحظات

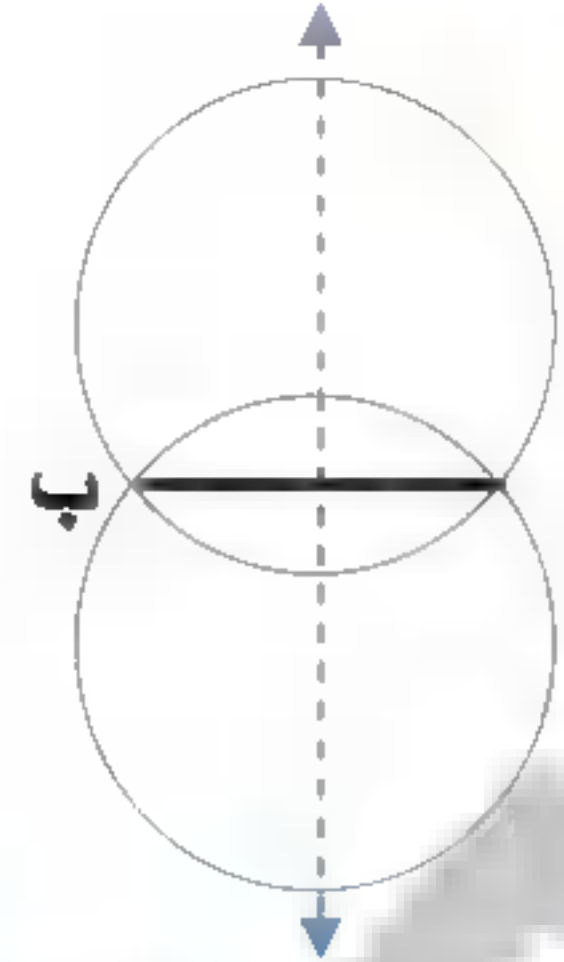
❖ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من : المستطيل - المربع - شبه المنحرف المتساوي الساقين

❖ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس : متوازي الأضلاع - المعين - شبه المنحرف غير المتساوي الساقين

مثال ١

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم $أ ب = ٦$ سم
 ثم ارسم دائرة قطرها ١٠ سم تمر بالنقطتين $أ ، ب$
 وكم دائرة يمكن رسمها

الحل



نق = ٥ سم

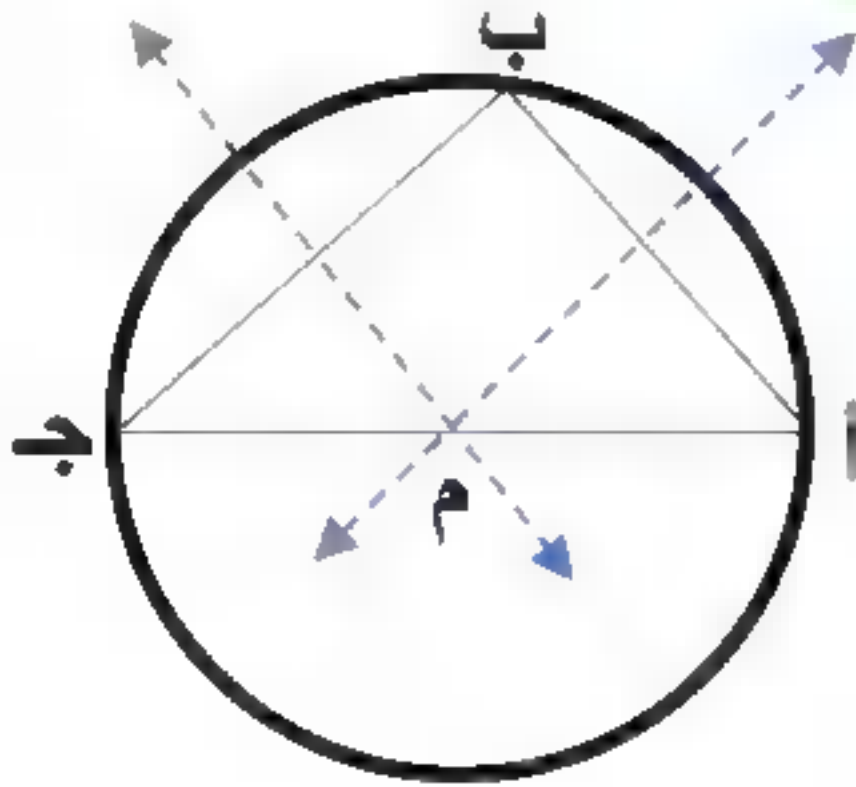
 $\frac{1}{4} أ ب = ٣$ سمنق < $\frac{1}{4} أ ب$

عدد الحلول دائرتان

مثال ٢

باستخدام الأدوات ارسم المثلث $أ ب ج$ القائم حيث
 $أ ب = ٣$ سم ، $ب ج = ٤$ سم ثم ارسم دائرة تمر
 برؤوس المثلث ثم أوجد طول نصف قطرها

الحل



من فيثاغورث

 $أ ج = ٥$ سم

∴ المركز م ينصف وتر المثلث

∴ نق = ٢,٥ سم

5

تمارين

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٢ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس

(أ) المثلث (ب) المربع (ج) المعين (د) المستطيل

٣ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس

(أ) معين (ب) مستطيل (ج) شبه منحرف (د) متوازي أضلاع

٤ مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

(أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

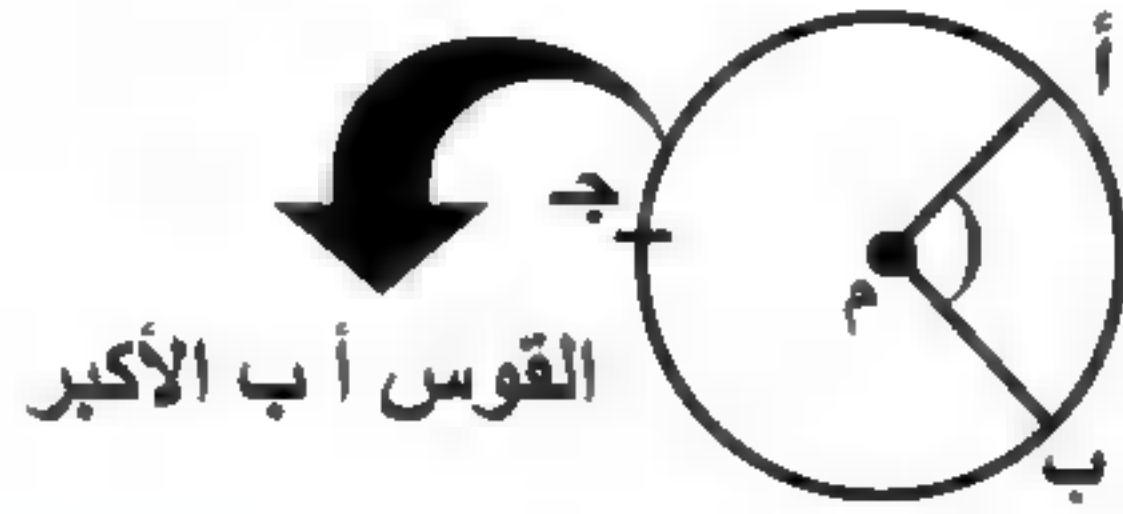
٥ مركز الدائرة الخارجة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

(أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

(١) ارسم القطعة $أ ب = ٤$ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم تمر بالنقطتين $أ ، ب$ (٢) ارسم $\Delta أ ب ج$ المتساوي الأضلاع طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ثم حدد موضع الدائرة بالنسبة لارتفاعاته.

هي زاوية رأسها مركز الدائرة ويحمل ضلعيها أنصاف أقطار

الزاوية المركزية

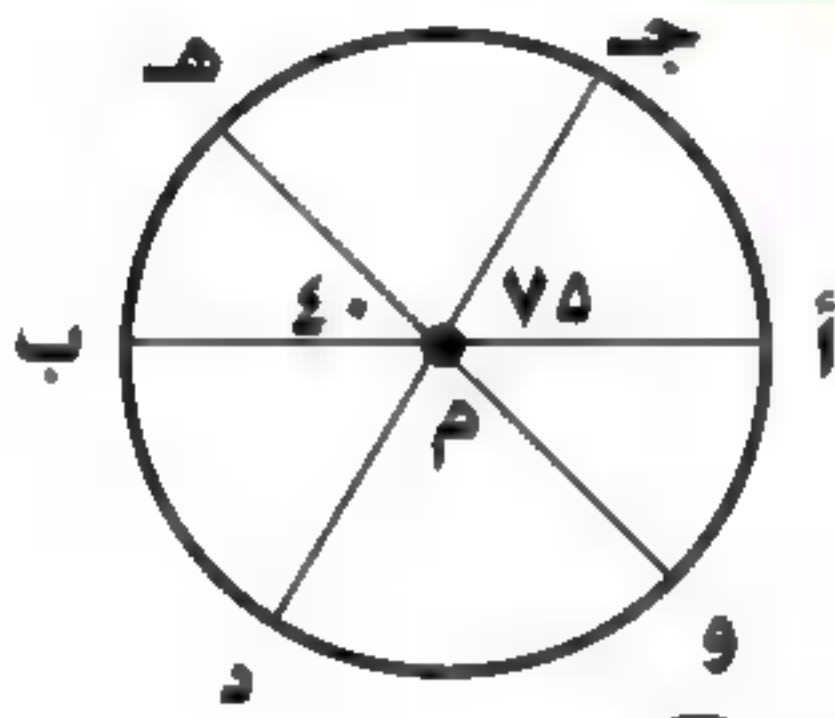


- أ م ب زاوية مركزية
- القوس المقابل لها هو القوس أب
- القوس ا ج ب يسمى أب الأكبر

قياس القوس يساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة له

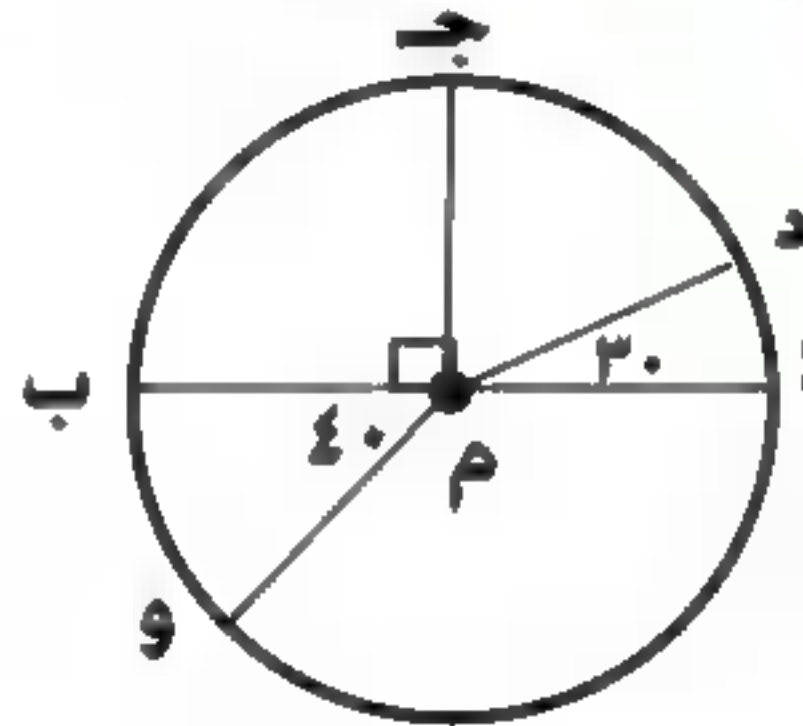
قياس القوس

تدريب



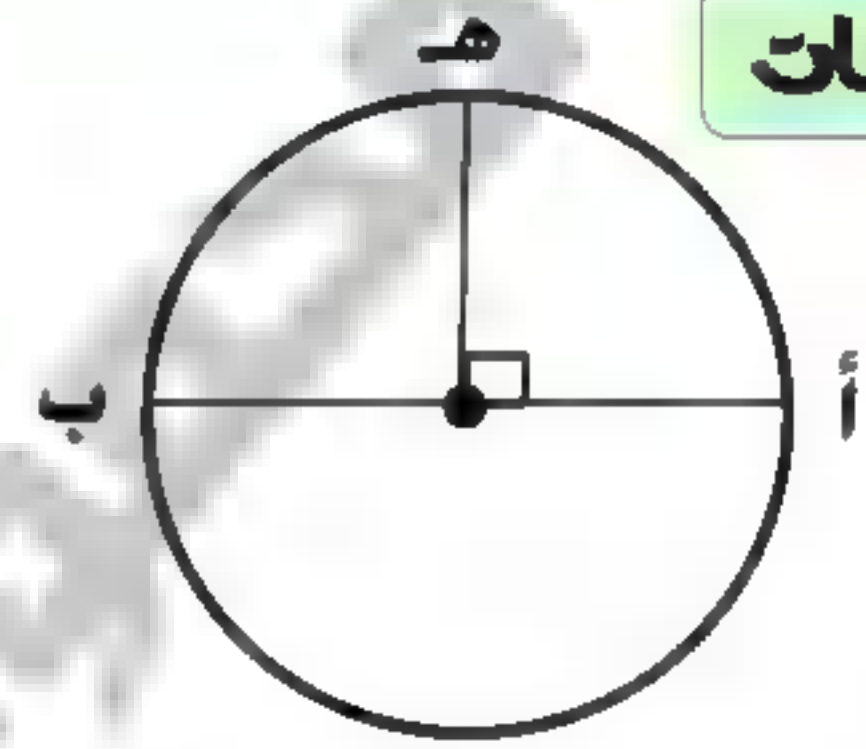
$$\begin{aligned} \text{ق (أ ب)} &= 75 \\ \text{ق (ب ج)} &= 40 \\ \text{ق (ج د)} &= 40 \\ \text{ق (د أ)} &= 75 \\ \text{ق (أ ج)} &= 115 \\ \text{ق (ب د)} &= 115 \\ \text{ق (أ د)} &= 155 \\ \text{ق (ب ج)} &= 115 \end{aligned}$$

مثال



$$\begin{aligned} \text{ق (أ ب)} &= 90 \\ \text{ق (ب ج)} &= 30 \\ \text{ق (ج د)} &= 60 \\ \text{ق (د أ)} &= 150 \\ \text{ق (أ ج)} &= 120 \\ \text{ق (ب د)} &= 120 \\ \text{ق (أ د)} &= 220 \\ \text{ق (ب ج)} &= 120 \end{aligned}$$

ملاحظات



- قياس الدائرة كلها = 360°
- قياس نصف الدائرة = 180°
- قياس ربع الدائرة = 90°
- قياس خمس الدائرة = $72^\circ = \frac{360}{5}$

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق}$$

طول القوس

تدريب

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ الدائرة .
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف
قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

نصيب
معاد رياضية
محمود عوض

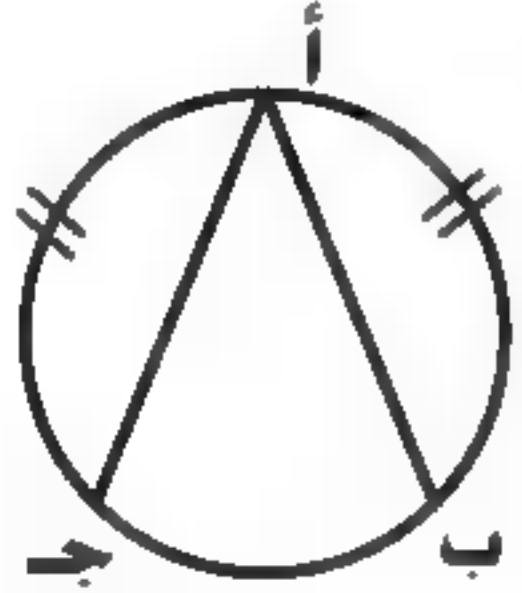
مثال

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ الدائرة .
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف
قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

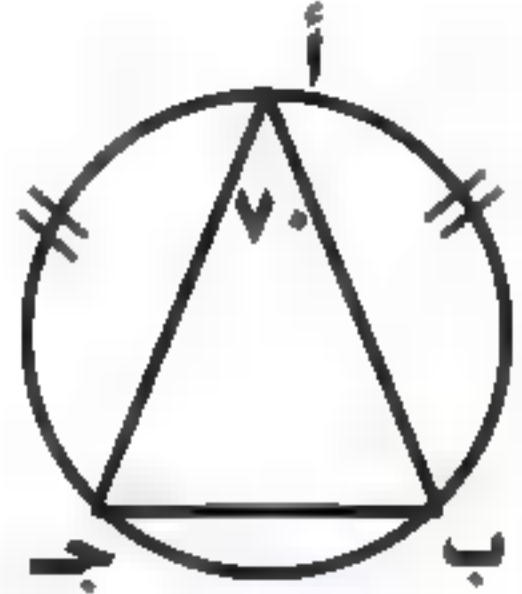
$$\begin{aligned} \text{قياس القوس الذى يمثل } \frac{1}{3} \text{ الدائرة} &= \frac{360}{3} = 120^\circ \\ \text{طول القوس} &= \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق} \\ &= \frac{120}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 14.6 \text{ سم} \end{aligned}$$

٢ إذا كانت الأقواس متساوية
فإن أوتارها تكون متساوية



إذا كان ق (أب) = ق (أج)
فإن : أب = أج

مثال



ق (أب) = ق (أج)
ق (أ) = ٧٠
فأوجد ق (ب)

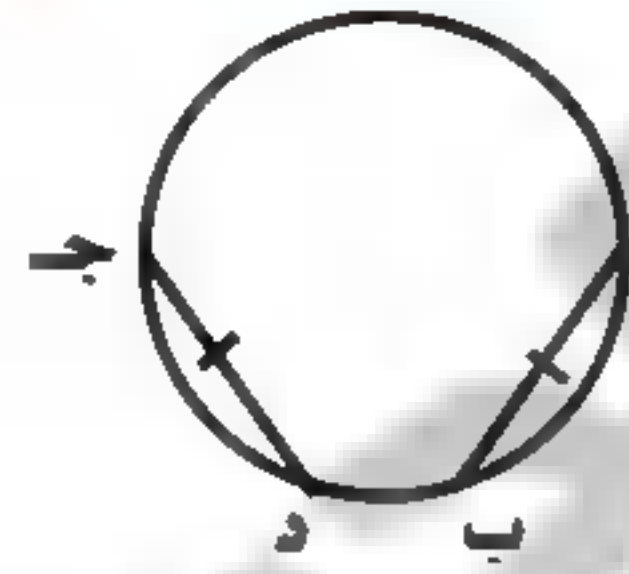
الحل

∴ ق (أب) = ق (أج) ∴ أقواس متساوية

∴ أب = أج ∴ أوتار متساوية

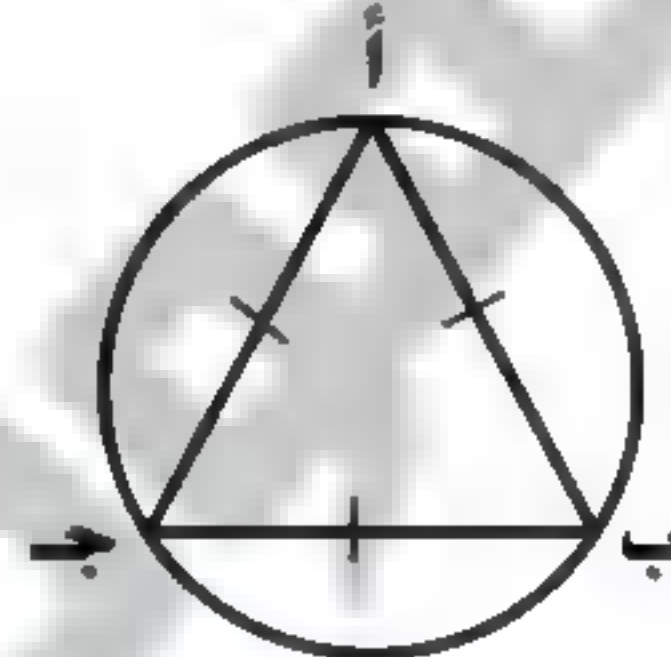
$$\therefore \text{ق (ب)} = \text{ق (ج)} = \frac{180 - 70}{2} = \frac{110}{2} = 55^\circ$$

١ إذا كانت الأوتار متساوية
فإن أقواسها تكون متساوية



إذا كان أب = جد
فإن : ق (أب) = ق (جد)

مثال



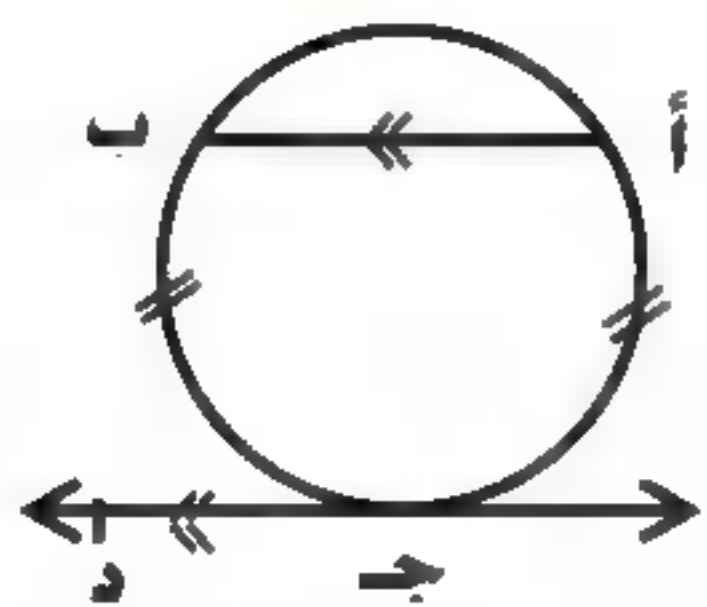
أب ج ∆ متساوي الأضلاع
أوجد ق (أب)

الحل

∴ أب = ب ج = أج ∴ أوتار متساوية
∴ ق (أب) = ق (ب ج) = ق (أ ج) ∴ أقواس متساوية

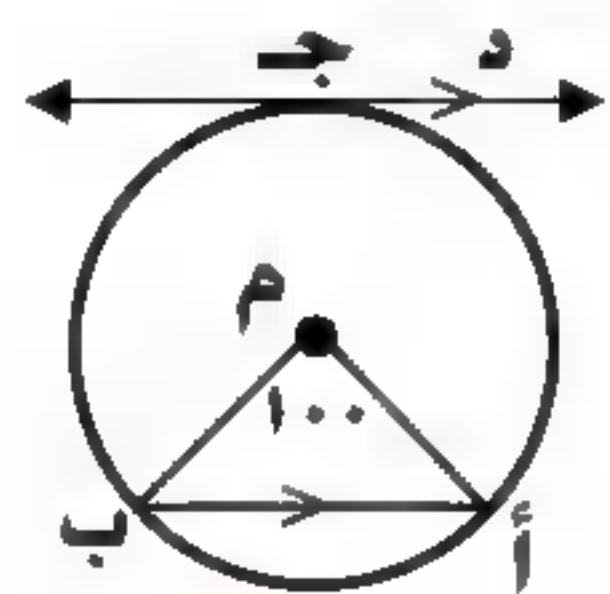
$$\therefore \text{ق (أب)} = \frac{360}{3} = 120^\circ$$

٤ الوتر والمماس المتوازيان
يحصران قوسان متساويان



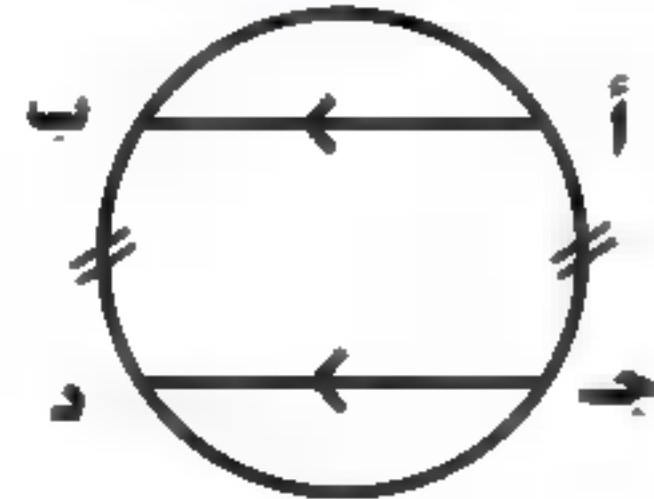
إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
فإن ق (أج) = ق (ب د)

تدريب



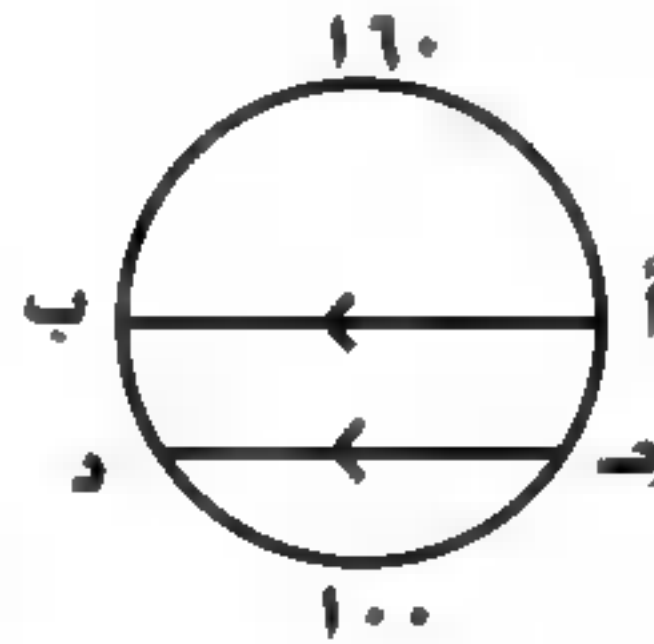
إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
ق (أ م ب) = ١٠٠
فإن ق (أ ج) =

٣ الوتران المتوازيان
يحصران قوسان متساويان



إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
فإن ق (أج) = ق (ب د)

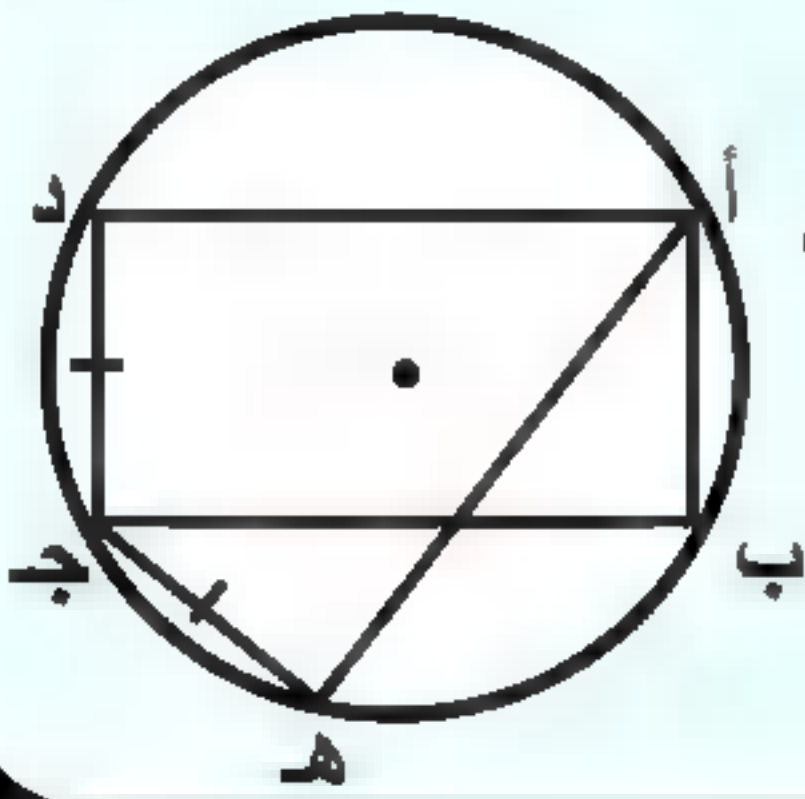
تدريب



إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
ق (أب) = ١٦٠ ،
ق (ج د) = ١٠٠
فإن ق (أ ج) =

٥ في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في الطول متساوية في القياس

٢



أ ب ج د مستطيل مرسوم داخل
دائرة
ج د = ج د
أثبت أن : أ ه = ب ج

الحل

∴ أ ب = ج د خواص المستطيل

ه ج = ج د (معطى)

∴ أ ب = ه ج

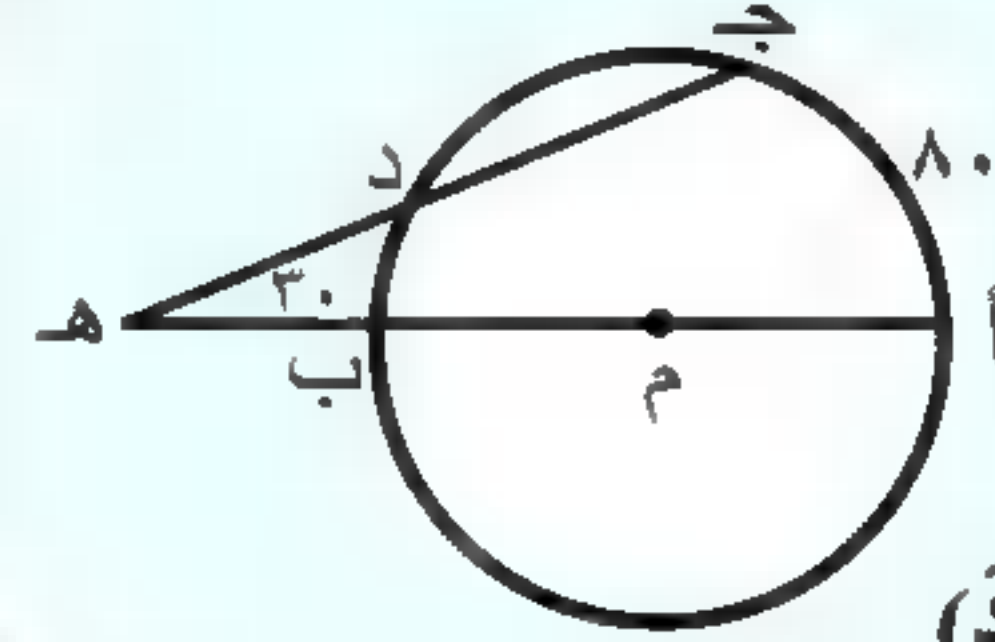
∴ ق (أ ب) = ق (ه ج)

بإضافة ق (ب ه) للطرفين

∴ ق (أ ه) = ق (ب ج)

∴ أ ه = ب ج ه طث

١

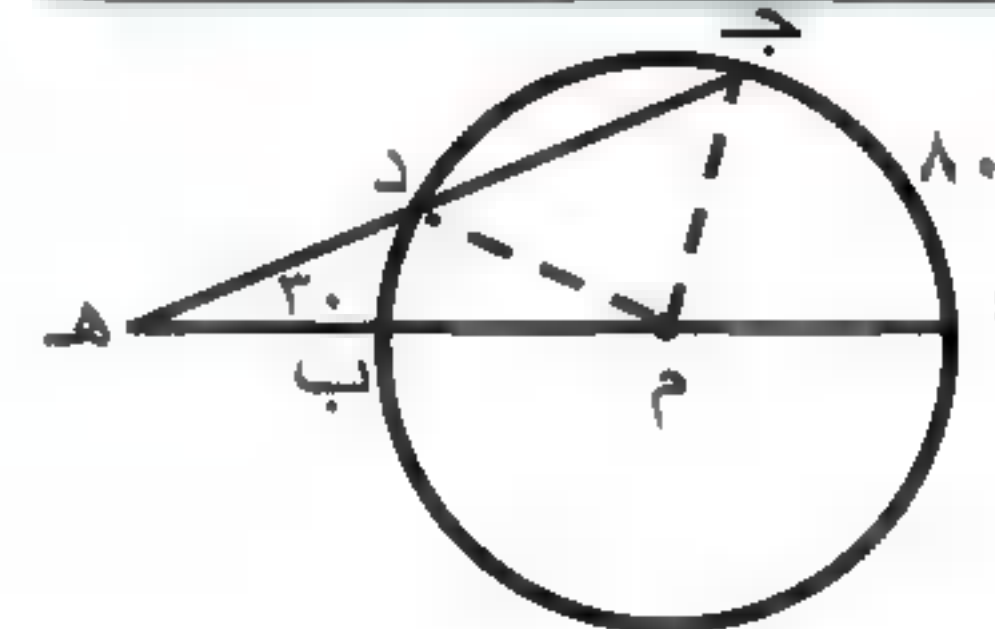


أ ب قطر فى الدائرة م
ق (أ ه ج) = ٣٠°
ق (أ ج د) = ٨٠°
أوجد ق (ج د)

الحل

العمل :

نرسم م ج د ، م د



∴ ق (أ ج د) = ٨٠° ∴ ق (أ م ج) = ٨٠°

∴ أ م ج زاوية خارجة عن ∆ ج م ه

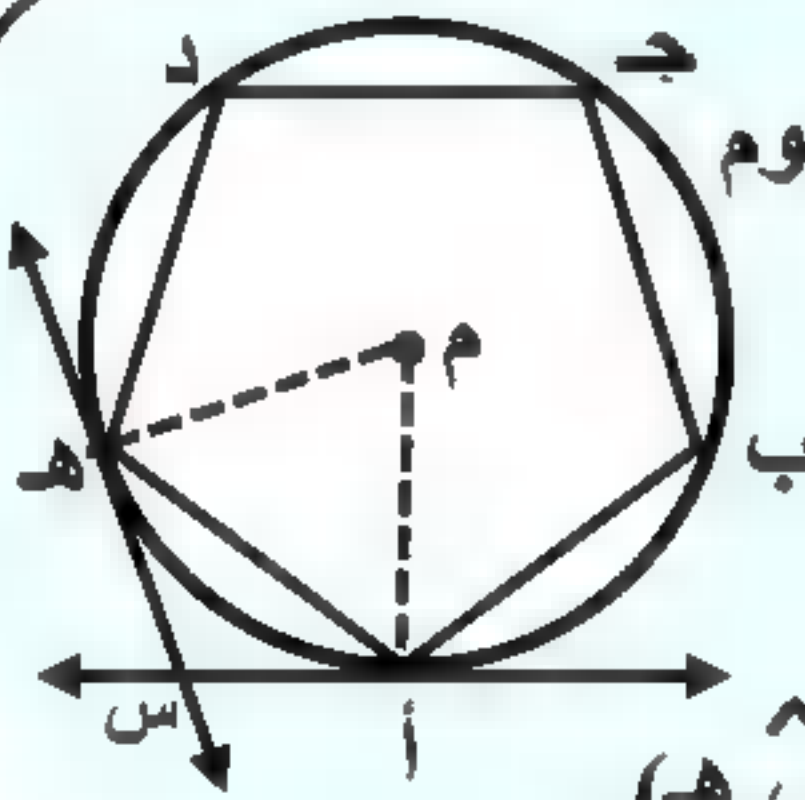
∴ ق (م ج ه) = ٨٠° - ٣٠° = ٥٠°

فى ∆ ج م د : ∴ م ج = م د (أنصاف أقطار)

∴ ق (ج م د) = ١٨٠° - (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

∴ ق (ج د) = ٨٠°

٤



أ ب ج د ه خماسى منتظم مرسوم
داخل الدائرة م
أ س مماس للدائرة عند أ
ه س مماس للدائرة عند ه
أوجد : ١- ق (أ ه) ٢- ق (أ س ه)

العمل : نرسم م أ ، م ه

الحل

∴ أ ب ج د ه خماسى منتظم

∴ أ ب = ب ج = ج د = د ه = ه أ

∴ ق (أ ب) = ق (ب ج) = ق (ج د) = ق (د ه) = ق (ه أ)

∴ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق (أ ه) = ٣٦٠° / ٥ = ٧٢° أولا

∴ ق (أ ه) = ٧٢° ∴ ق (أ م ه) = ٧٢°

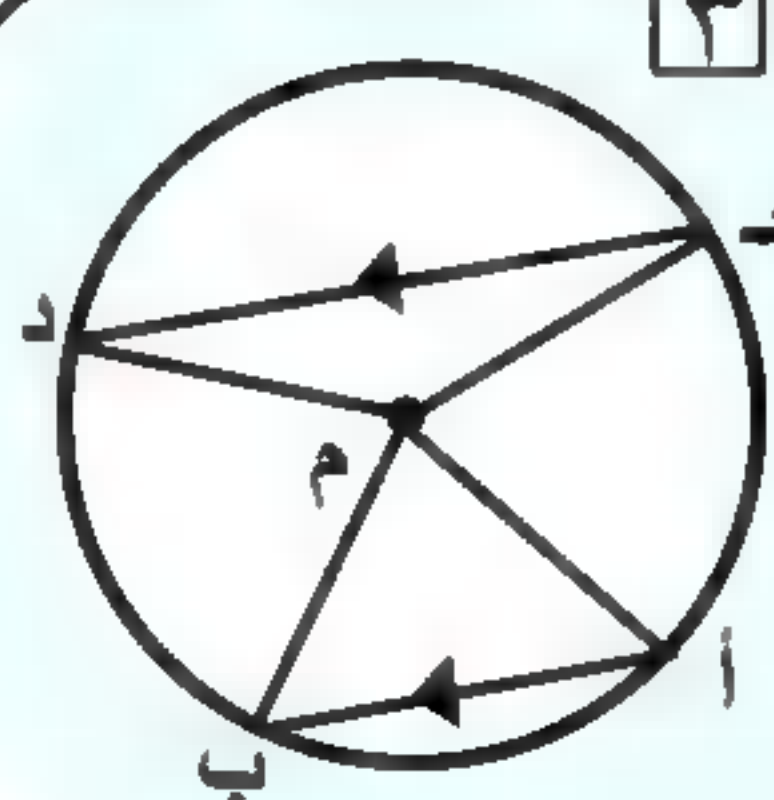
∴ أ س مماس ∴ ق (م أ س) = ٩٠°

∴ ه س مماس ∴ ق (م ه س) = ٩٠°

فى الشكل الرباعى م أ س ه :

ق (أ س ه) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٧٢°) = ١٠٨°

٣



م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم
أ ب ، ج د وتران متوازيان
ق (أ ج د) = ٨٠°
طول (أ ج د) = طول (أ ب)
أوجد : ١- ق (م أ ب) ٢- ق (ج د) ٣- طول (ج د)

∴ طول (أ ج د) = طول (أ ب)

∴ ق (أ ج د) = ق (أ ب) = ٨٠°

∴ ق (أ م ب) المركزية = ٨٠°

∴ م أ = م ب (أنصاف أقطار) ∴ ∆ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق (م أ ب) = ق (م ب أ) = ٥٠° المطلوب الأول

∴ أ ب // ج د ∴ ق (أ ج د) = ق (ب د) = ٨٠°

∴ ق (ج د) + ق (أ ج د) + ق (أ ب) + ق (ب د) = ٣٦٠°

∴ ق (ج د) = ٣٦٠° - (٨٠° + ٨٠° + ٨٠°) = ١٢٠°

طول ج د = ١٢٠ / ٣٦٠ × ٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٣١,٤ سم

تمارين

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 قياس القوس الذي يمثل ثلث قياس الدائرة =

- (أ) ٣٦٠ (ب) ١٨٠ (ج) ١٢٠ (د) ٩٠

2 طول نصف الدائرة التي طول نصف قطرها نق سم = سم

- (أ) 2π نق (ب) $\frac{1}{4}\pi$ نق (ج) $\frac{1}{3}\pi$ نق (د) π نق

3 قياس الزاوية المركزية المرسومة في $\frac{1}{3}$ دائرة =

- (أ) ٢٤٠ (ب) ١٢٠ (ج) ٦٠ (د) ٣٠

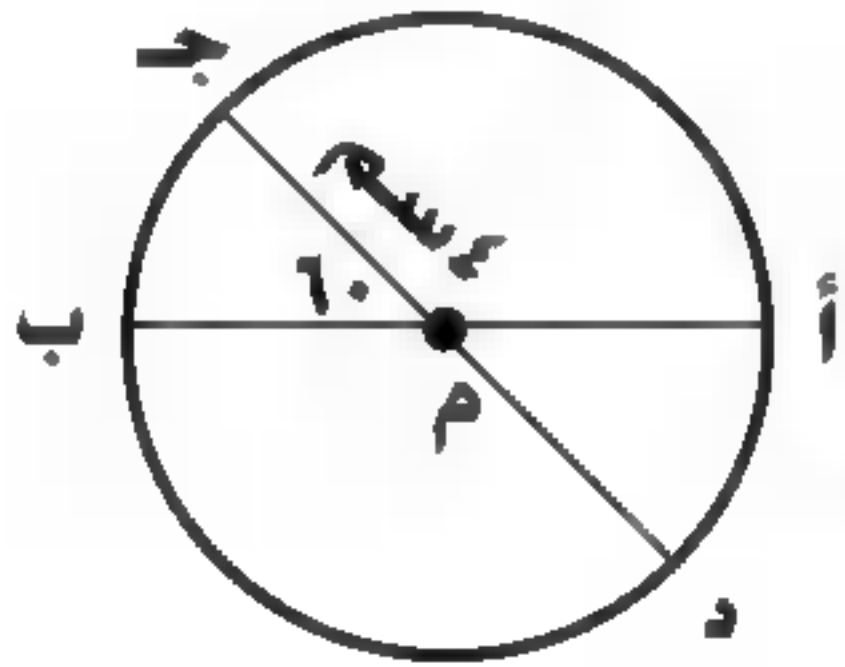
4 قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله $\frac{1}{3}\pi$ نق =

- (أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ١٢٠ (د) ٢٤٠

5 في الشكل المقابل: م دائرة، م ج = ٤ سم

ق (ج م ب) = ٦٠° فإن طول ب د =

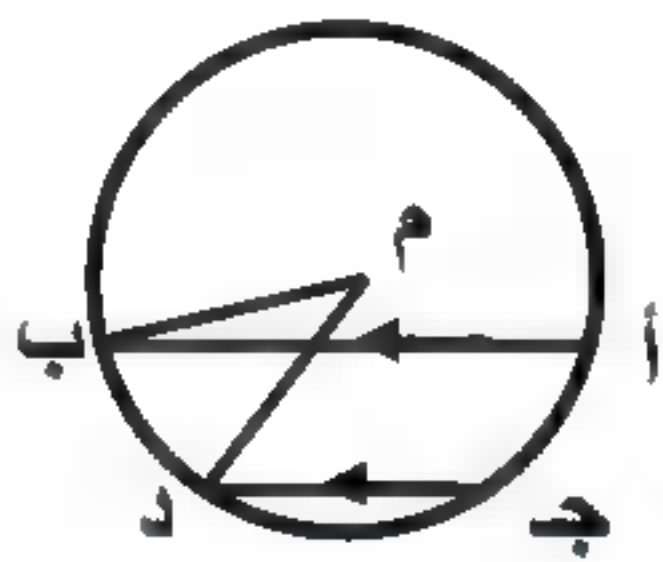
- (أ) $\pi 4$ (ب) $\pi 8$ (ج) $\pi \frac{8}{3}$ (د) $\pi 16$



6 في الشكل المقابل: م دائرة، أ ب // ج د

ق (أ ج) = ٣٠° فإن ق (ب م د) =

- (أ) ١٠° (ب) ١٥° (ج) ٣٠° (د) ٦٠°



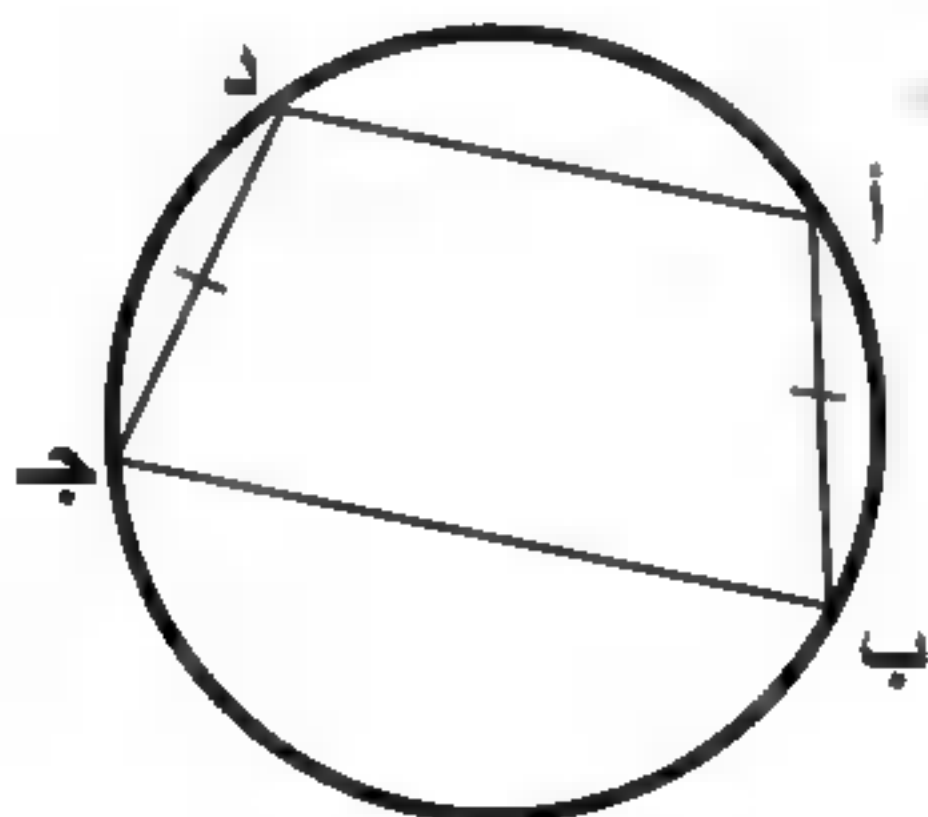
٢ في الشكل المقابل:

أ ب ج د شكل رباعي

أ ب = ج د

اثبت أن:

أ ج = ب د

١ أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{6}$ الدائرة.

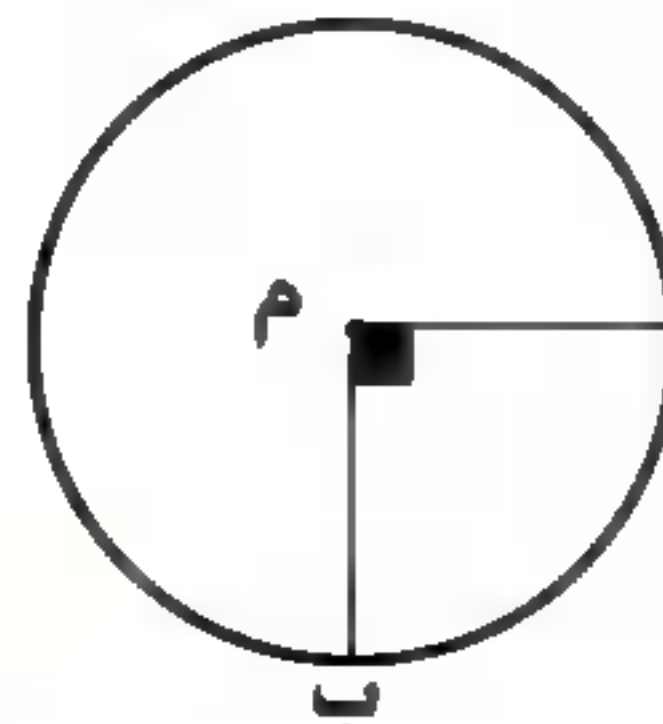
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧ سم.

٢ في الشكل المقابل:

م دائرة، ق (أ م ب) = ٩٠°

طول نصف قطرها = ٧ سم

أوجد طول أ ب

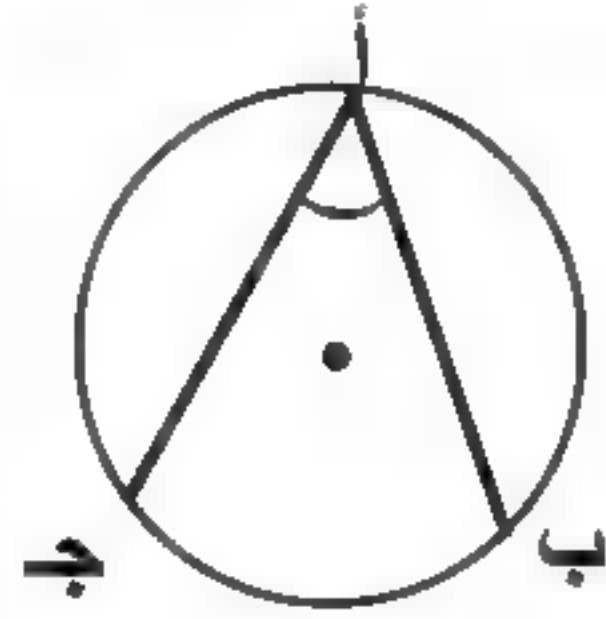
حيث $\pi = \frac{22}{7}$ 

العلاقة بين المحيطية والمركزية

الدرس
الثاني 2

هي زاوية رأسها على الدائرة ويحمل ضلعيها وتران

الزاوية المحيطية



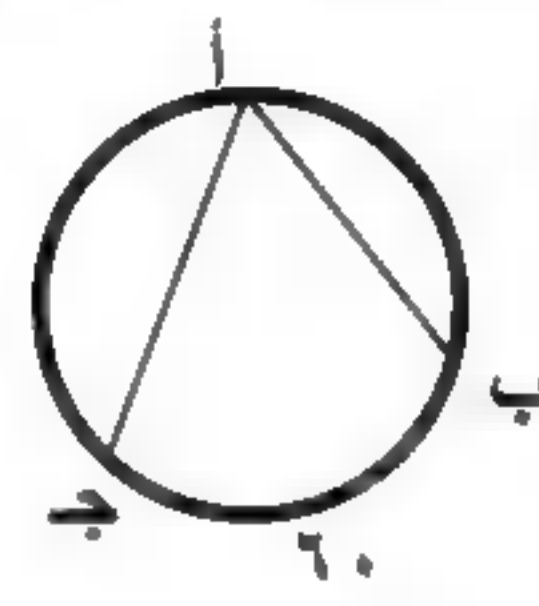
- ب أ ج زاوية محيطية
- القوس المقابل لها هو ب ج

قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس
المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية المحيطية =
نصف قياس القوس المقابل لها

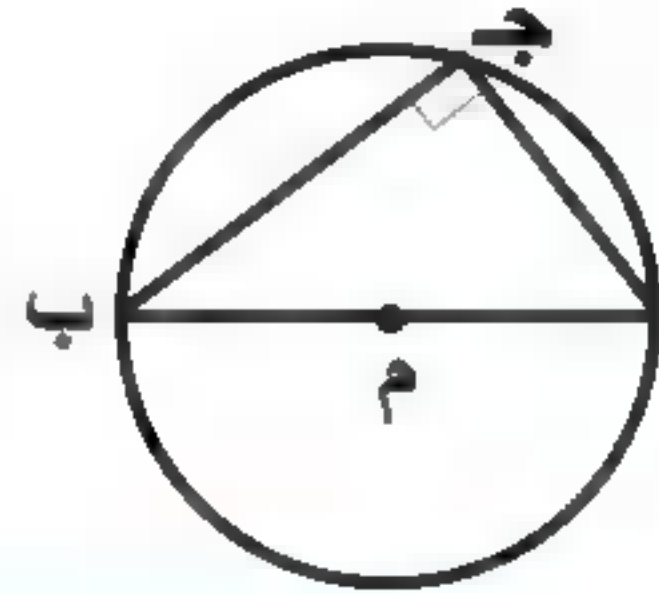


د أ ج ب المحيطية ، د أ م ب المركزية
مشتريكتان في أ ب
∴ ق (أ ج ب) = $\frac{1}{2}$ ق (أ م ب)



ق (ب أ ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج)
فإذا كان ق (ب ج) = ٦٠
فإن ق (ب أ ج) = ٣٠

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

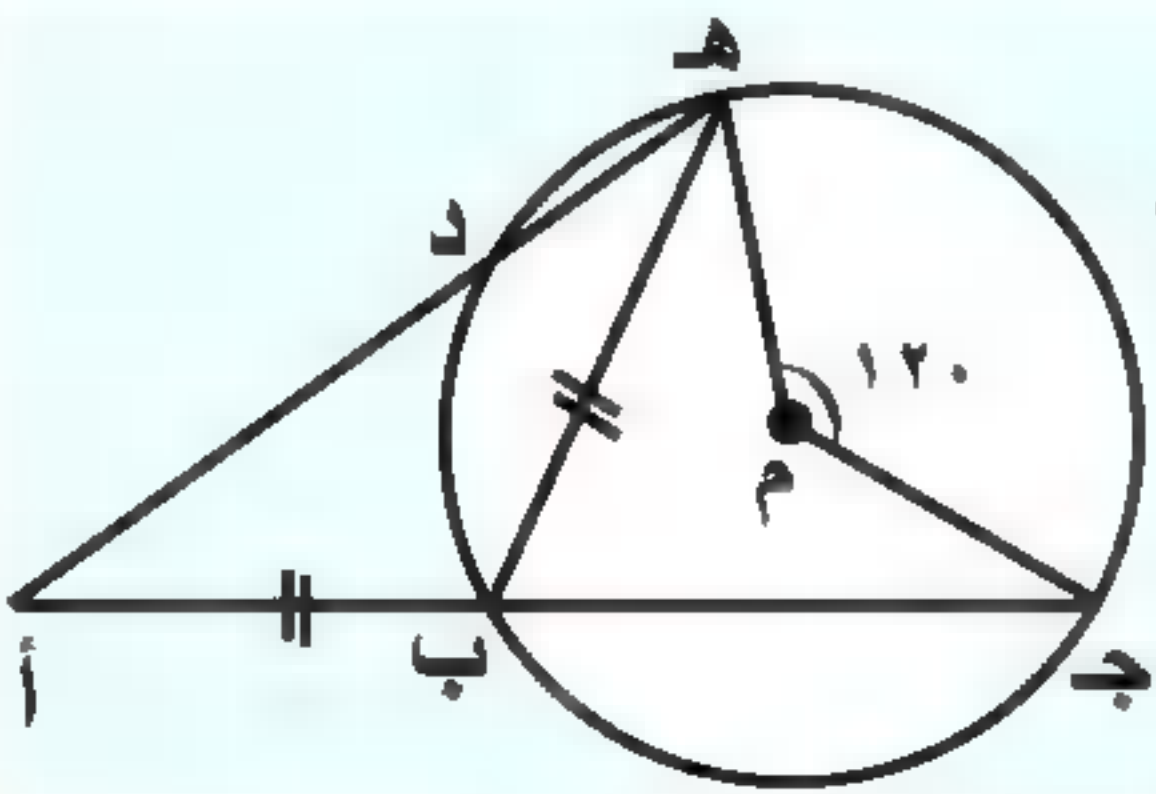


∴ أ ب قطر

∴ ق (ج) المحيطية = ٩٠°

لأنها محيطية القوس المقابل لها نصف دائرة أ

مثال ٢



ق (هـ م ج) = ١٢٠°
أ ب = ب هـ
أوجد: ق (د أ ج)

الحل

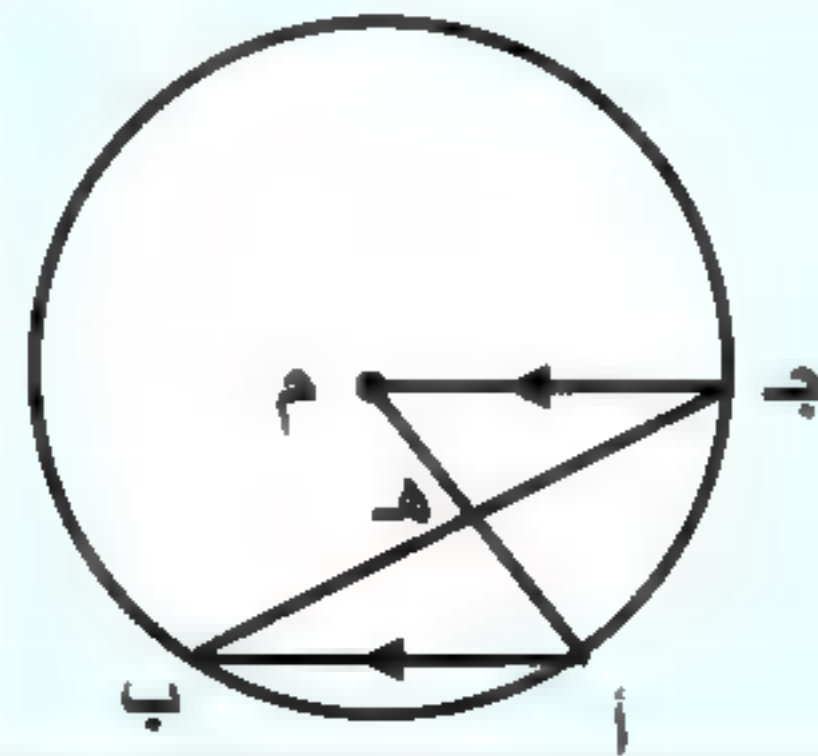
∴ ق (هـ ب ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية

لأنهما مشتركتان في أ ج ∴ ق (هـ ب ج) = ٦٠°

∴ أ ب = ب هـ

∴ ق (ب هـ أ) = ق (هـ أ ب) = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠°

مثال ١



أ ب وتر في الدائرة م

ج م // أ ب

اثبت أن : ب هـ < أ هـ

الحل

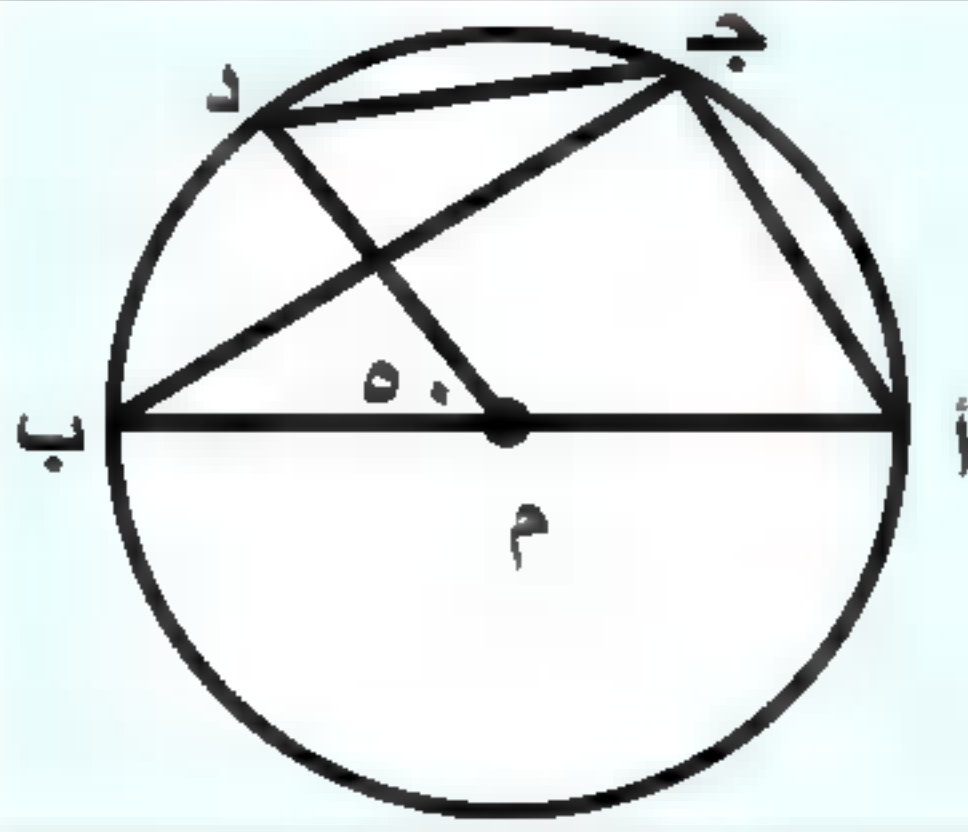
∴ ق (م) = ٢ ق (ب)

مركزية ومحيطية مشتركتان في أ ج

∴ ج م // أ ب ∴ ق (م) = ق (أ) بالتبادل

في Δ أ هـ ب : ∴ ق (أ) = ٢ ق (ب)

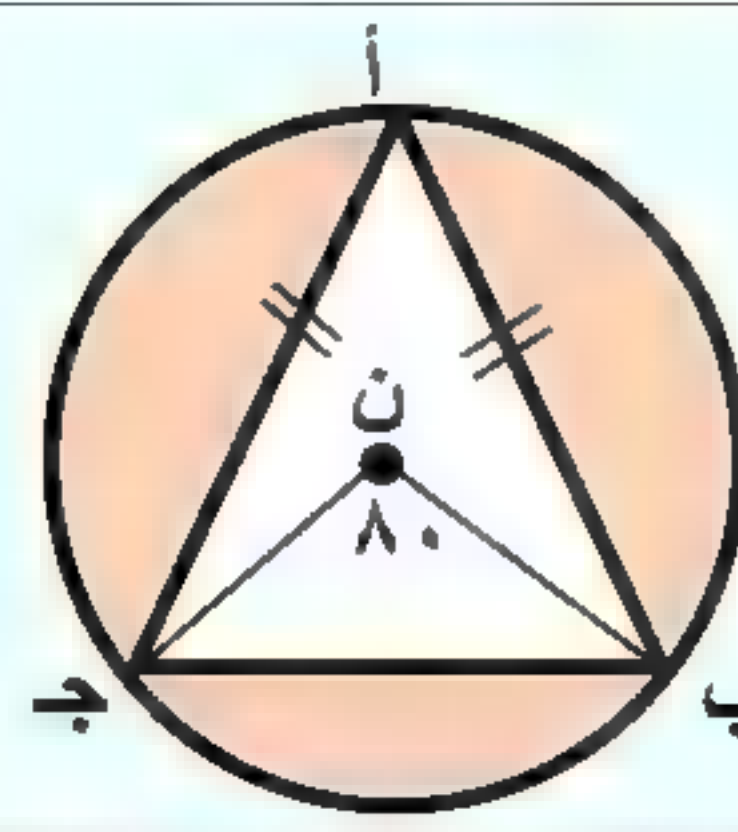
∴ ق (أ) < ق (ب) ∴ ب هـ < أ هـ



مثال ٤

أب قطر في الدائرة م
ق (د م ب) = 50°
أوجد ق (أ ج د)

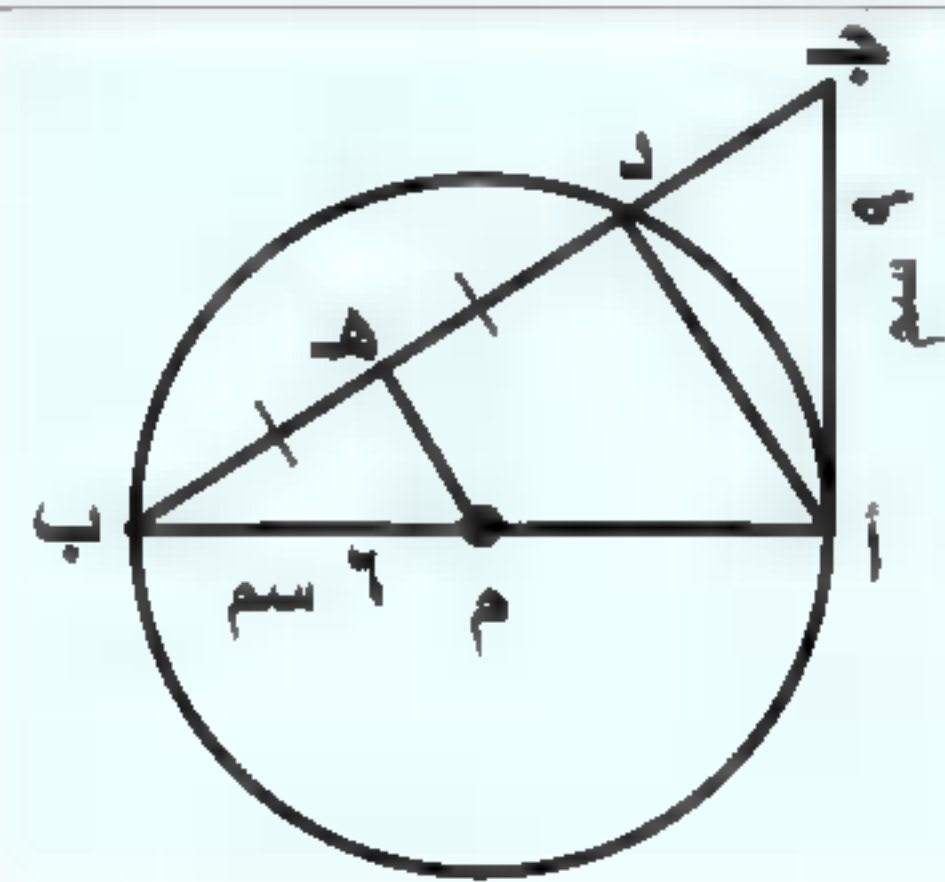
الحل



مثال ٣

أب = أ ج ،
ق (ب ن ج) = 80°
أوجد: ١) ق (أ ب ج)
٢) ق (ب ج) الأكبر

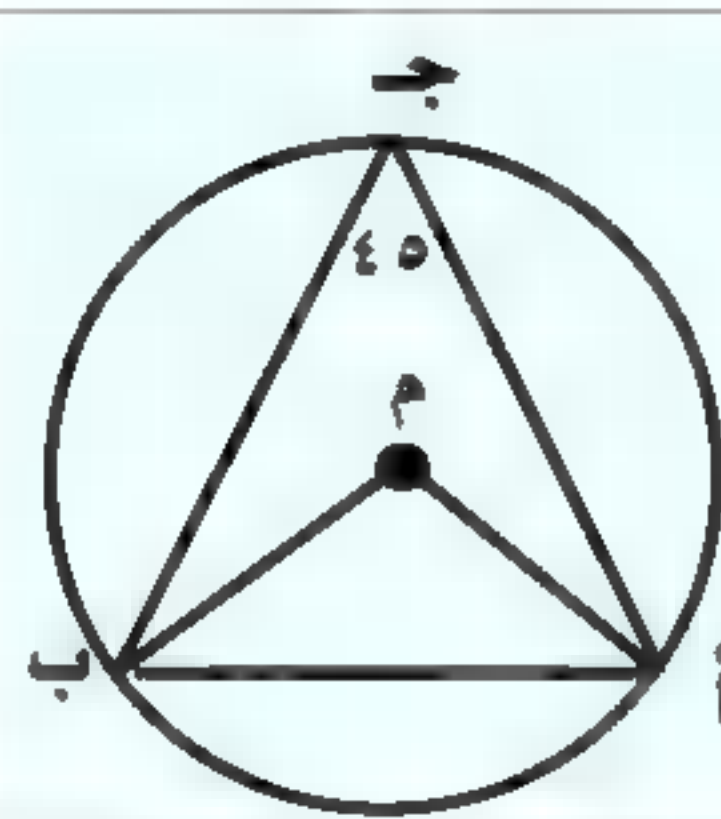
الحل



تدريب ٢

أب قطر ، أ ج مماس
هـ منتصف د ب
م ب = ٦ سم ، أ ج = ٩ سم
أوجد طول كل من :
ب ج ، أ د ، م هـ

الحل



تدريب ١

ق (ج) = 45°
أوجد ق (م أ ب)

الحل

تمارين

١ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس =

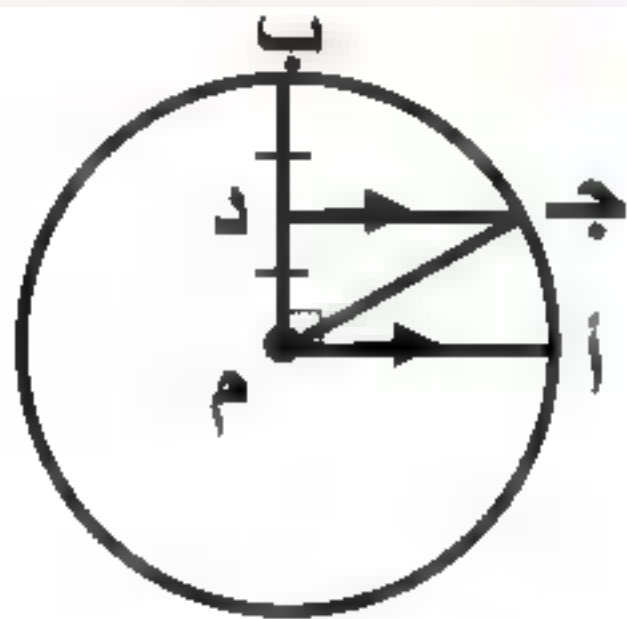
(أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (ج) ١ : ٢ (د) ١ : ٣

٢ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة =

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°

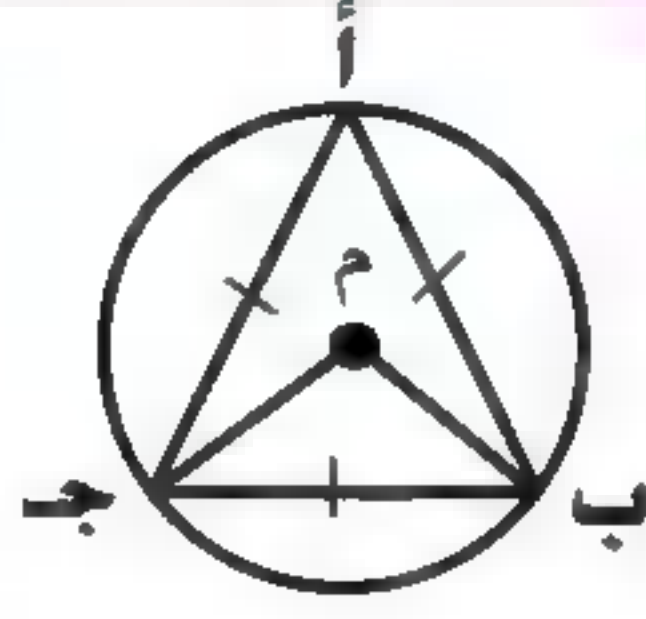
٣ الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر في الدائرة تكون

(أ) منعكسة (ب) قائمة (ج) منفرجة (د) حادة



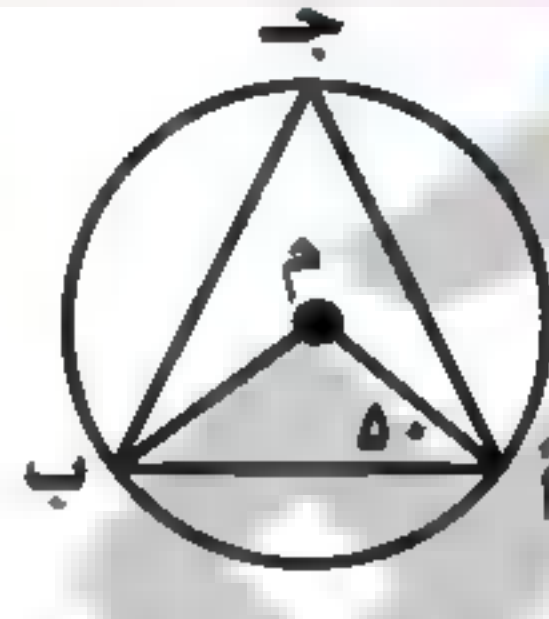
7

أم // جـ د ، ب د = د م
فإن ق (أ ج) =



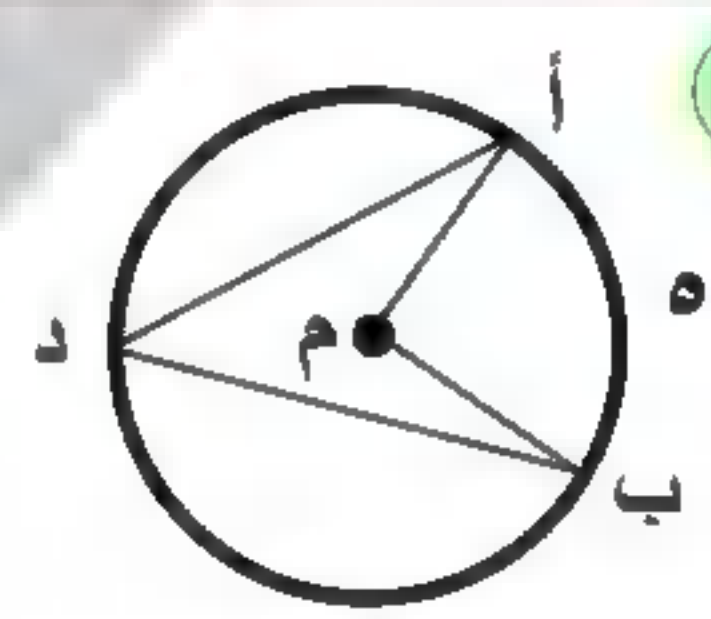
6

أ ب جـ Δ متساوي الأضلاع
فإن ق (ب م ج) =



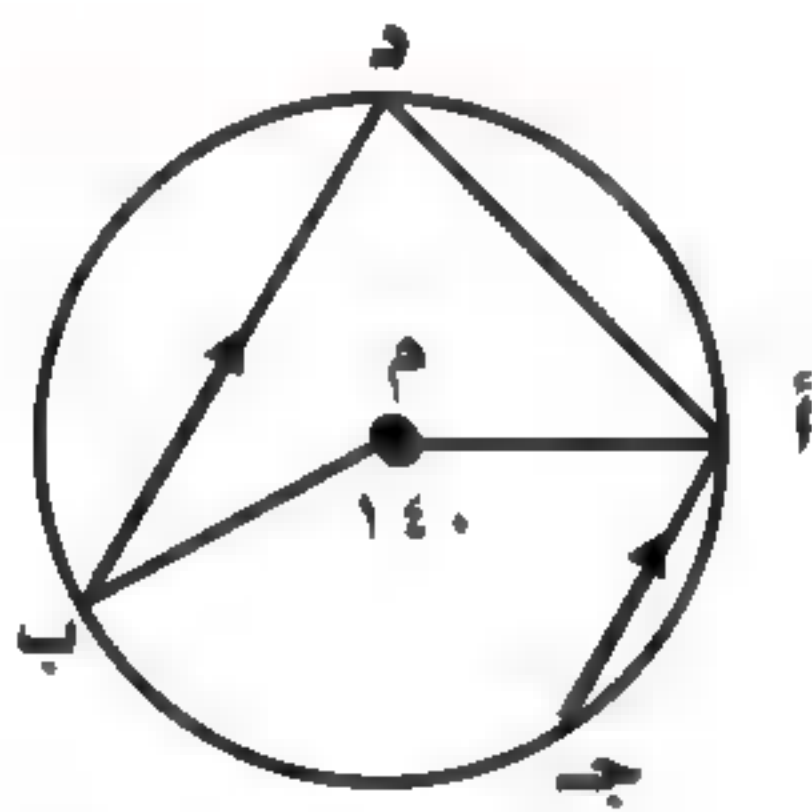
5

إذا كان ق (م أ ب) = ٥٠
فإن ق (ج) =



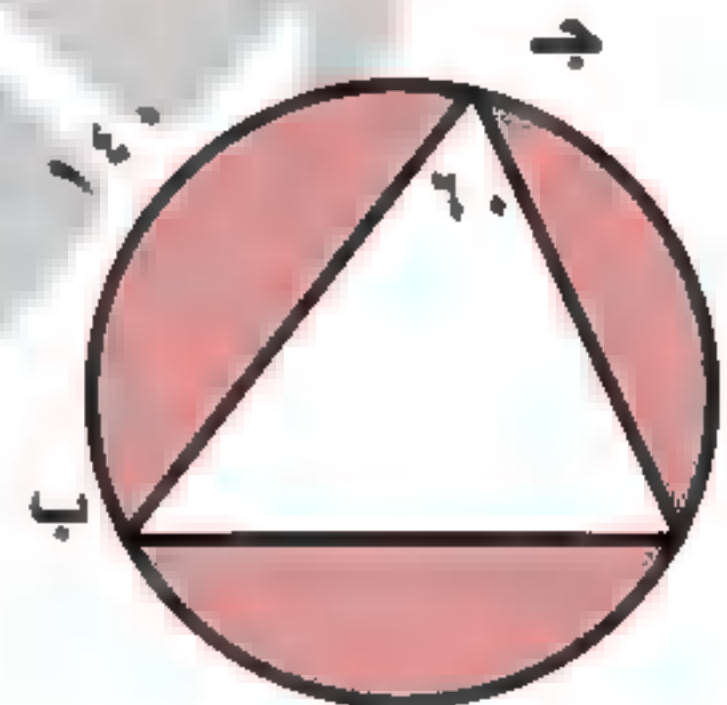
4

إذا كان ق (أ ب) = ٥٠
فإن ق (أ د ب) =



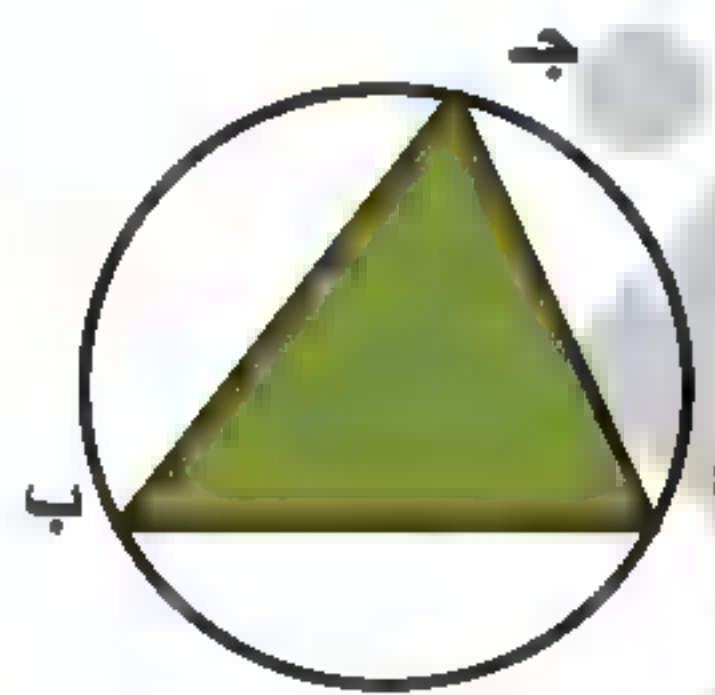
3

أ جـ // د ب
ق (أ م ب) = ١٤٠
أوجد ق (ج أ د)



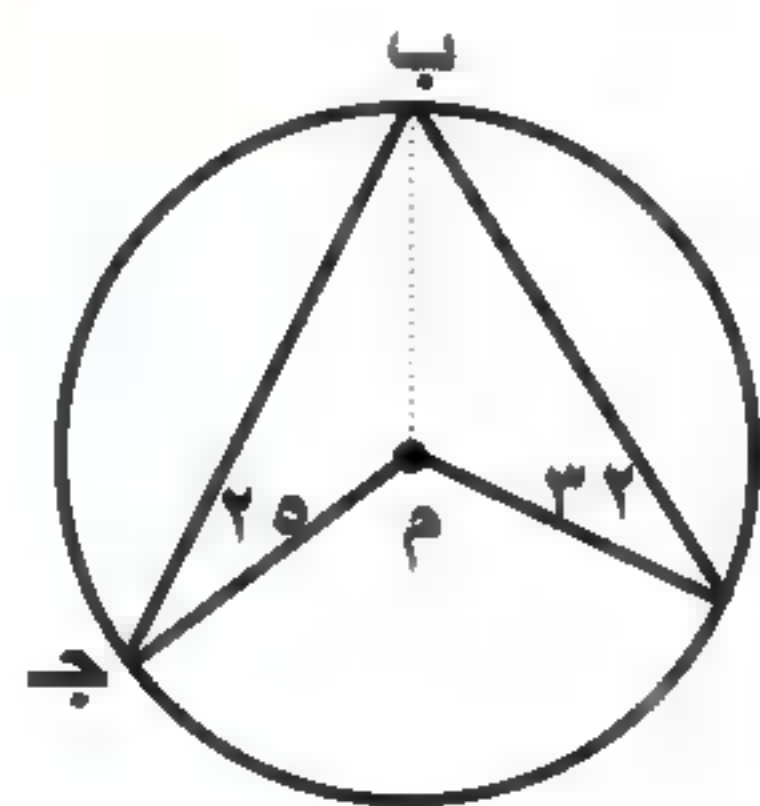
2

ق (ج) = ٦٠
ق (ج ب) = ١٤٠
أوجد ق (أ ج)



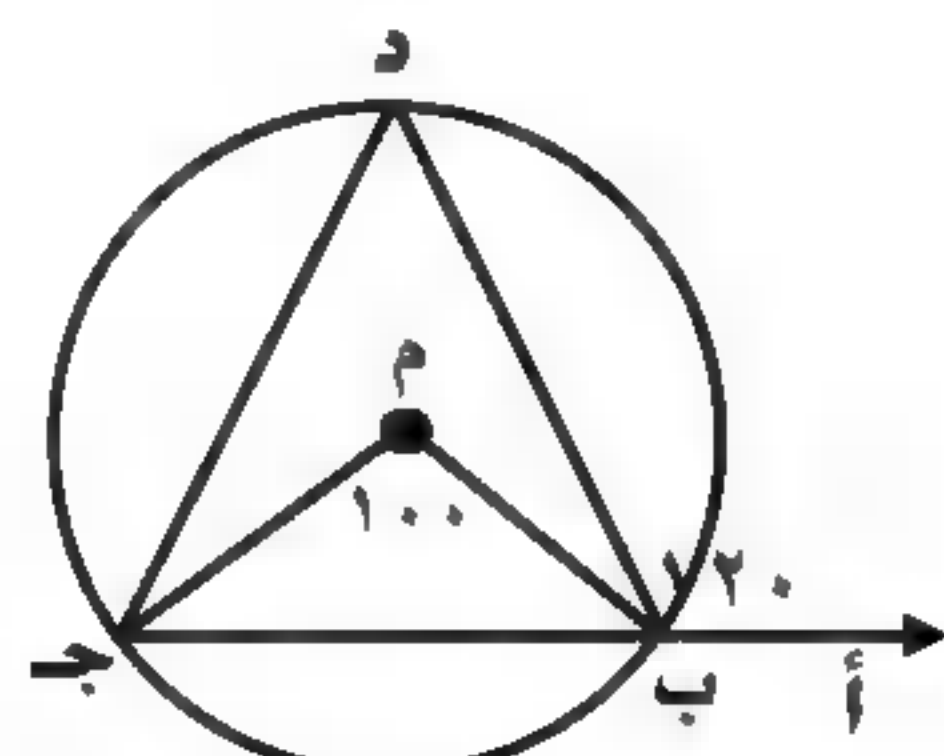
1

ق (أ ب) : ق (ب ج) : ق (أ ج) =
٣ : ٥ : ٤
أوجد : ق (أ ج ب)



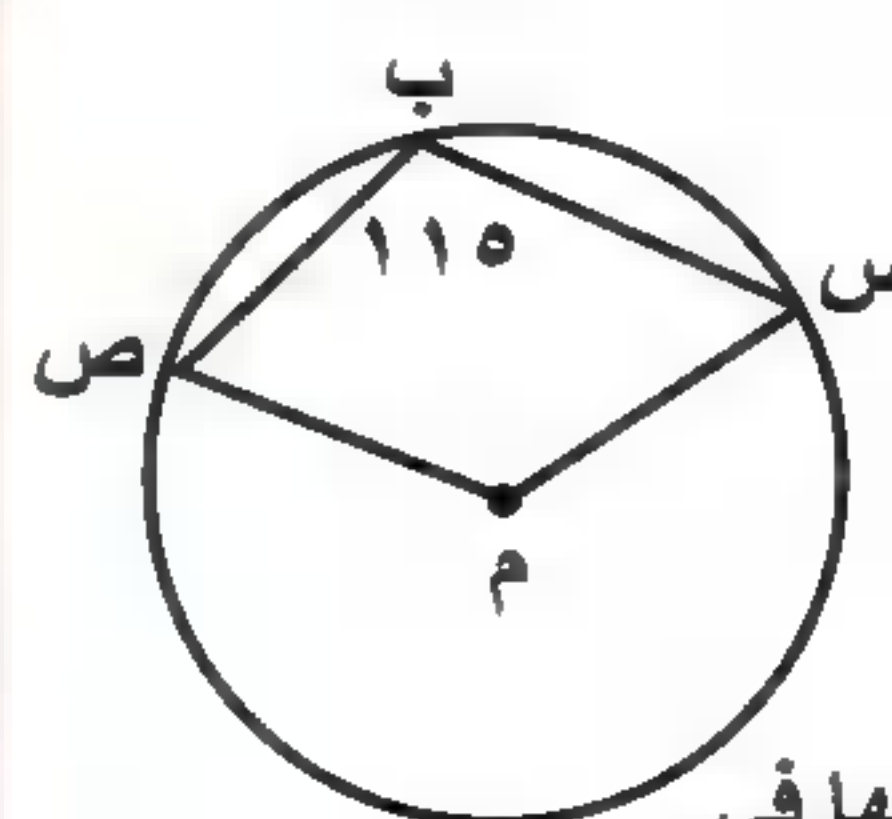
7

ق (أ) = ٣٢
ق (ج) = ٢٥
أوجد : ق (أ م ج)



6

ق (ب م ج) = ١٠٠
ق (أ ب د) = ١٢٠
أوجد ق (د ج ب)

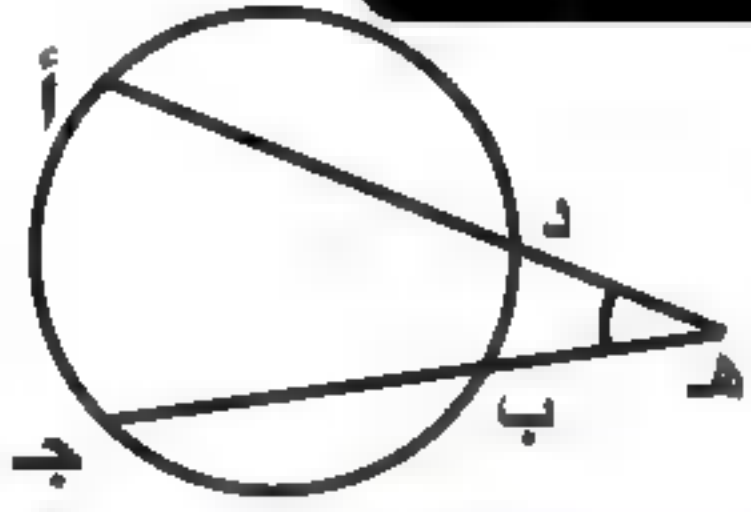


3

ق (ب) = ١١٥
أوجد : ق (س م ص)

خذ بالك : ب محيطية تشترك معها في
القوس زاوية مركزية وهي م المنعكسة

تمرين مشهور ٢



لو تقاطع وتران خارج دائرة

قياس زاوية التقاطع = نصف الطرح

$$\widehat{ق}(\widehat{هـ}) = \frac{1}{2} [\widehat{ق}(\widehat{أ ج}) - \widehat{ق}(\widehat{د ب})]$$

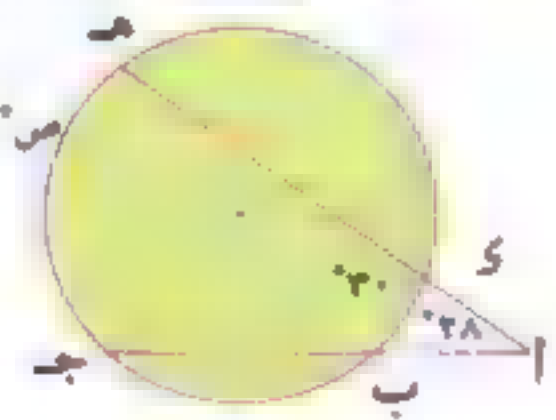
قياس القوس الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

$$\widehat{ق}(\widehat{أ ج}) = 2 \widehat{ق}(\widehat{هـ}) + \widehat{ق}(\widehat{د ب})$$

قياس القوس الأصغر = الأكبر - ضعف الزاوية

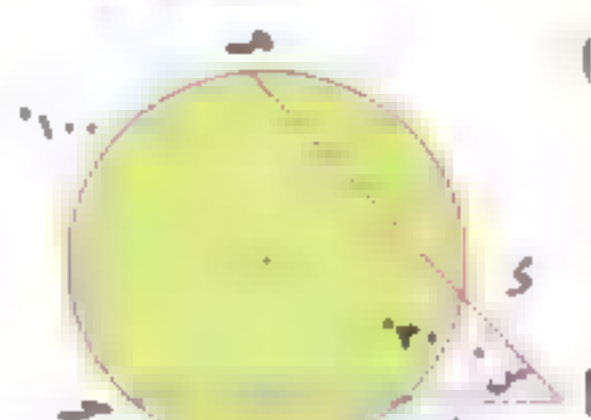
$$\widehat{ق}(\widehat{د ب}) = \widehat{ق}(\widehat{أ ج}) - 2 \widehat{ق}(\widehat{هـ})$$

تدريب 4



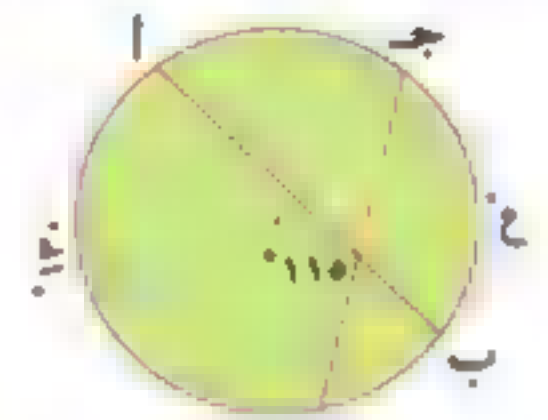
أوجد قيمة ص

تدريب 3



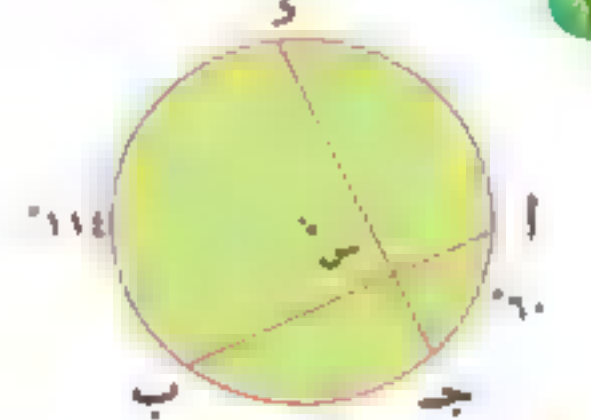
أوجد قيمة س

تدريب 2



أوجد قيمة ع

تدريب 1



أوجد قيمة س

مثال ٢

في الشكل المقابل:

$$\widehat{ق}(\widehat{أ}) = 30^\circ, \widehat{ق}(\widehat{ب د}) = 44^\circ$$

$$\widehat{ق}(\widehat{د ج هـ}) = 48^\circ$$

أوجد: ١- $\widehat{ق}(\widehat{هـ ج})$ ٢- $\widehat{ق}(\widehat{ب ج})$

الحل

من تمرين مشهور ٢:

$$\widehat{ق}(\widehat{هـ ج}) = 2 \widehat{ق}(\widehat{أ}) + \widehat{ق}(\widehat{د ب})$$

$$\therefore \widehat{ق}(\widehat{هـ ج}) = 2 \times 30 + 44 = 104^\circ \quad \text{أولاً}$$

$$\therefore \widehat{ق}(\widehat{د ج هـ}) = \text{المحيطة} = 48^\circ$$

$$\therefore \widehat{ق}(\widehat{د هـ}) = 2 \times 48 = 96^\circ$$

$$\therefore \text{قياس الدائرة} = 360^\circ$$

$$\therefore \widehat{ق}(\widehat{ب ج}) = 360 - (96 + 104 + 44) = 116^\circ$$

مثال ١

في الشكل المقابل:

$$\widehat{ق}(\widehat{أ ب د}) = 110^\circ$$

$$\widehat{ق}(\widehat{د هـ ب}) = 110^\circ$$

$$\widehat{ق}(\widehat{أ ج}) = 100^\circ$$

أوجد $\widehat{ق}(\widehat{د ج ب})$

الحل

من تمرين مشهور ١:

$$\widehat{ق}(\widehat{د ب}) = 2 \widehat{ق}(\widehat{د هـ ب}) - \widehat{ق}(\widehat{أ ج})$$

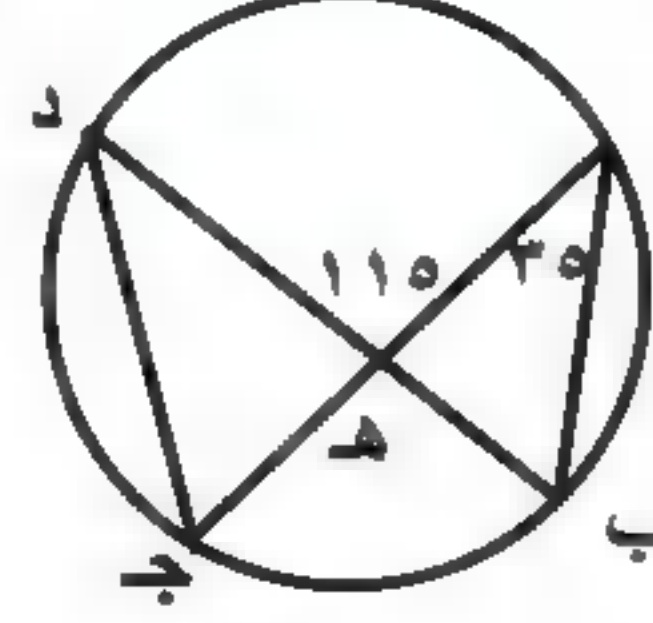
$$= 2 \times 110 - 100 = 120^\circ$$

$$\therefore \widehat{ق}(\widehat{د ج ب}) = \text{المحيطة} = \frac{1}{2} \widehat{ق}(\widehat{د ب})$$

$$\therefore \widehat{ق}(\widehat{د ج ب}) = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

تمارين

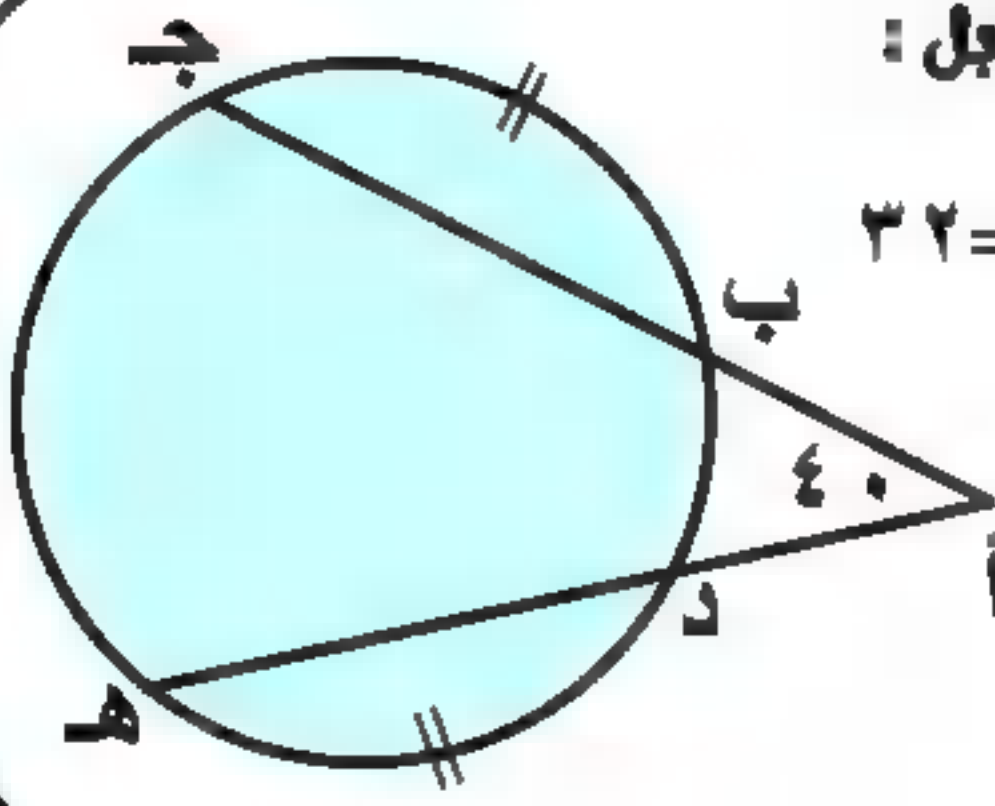
١ في الشكل المقابل :



ق (أ) = 35°
 ق (أهـ د) = 115°
 أوجد : ق (أ د)

الحل

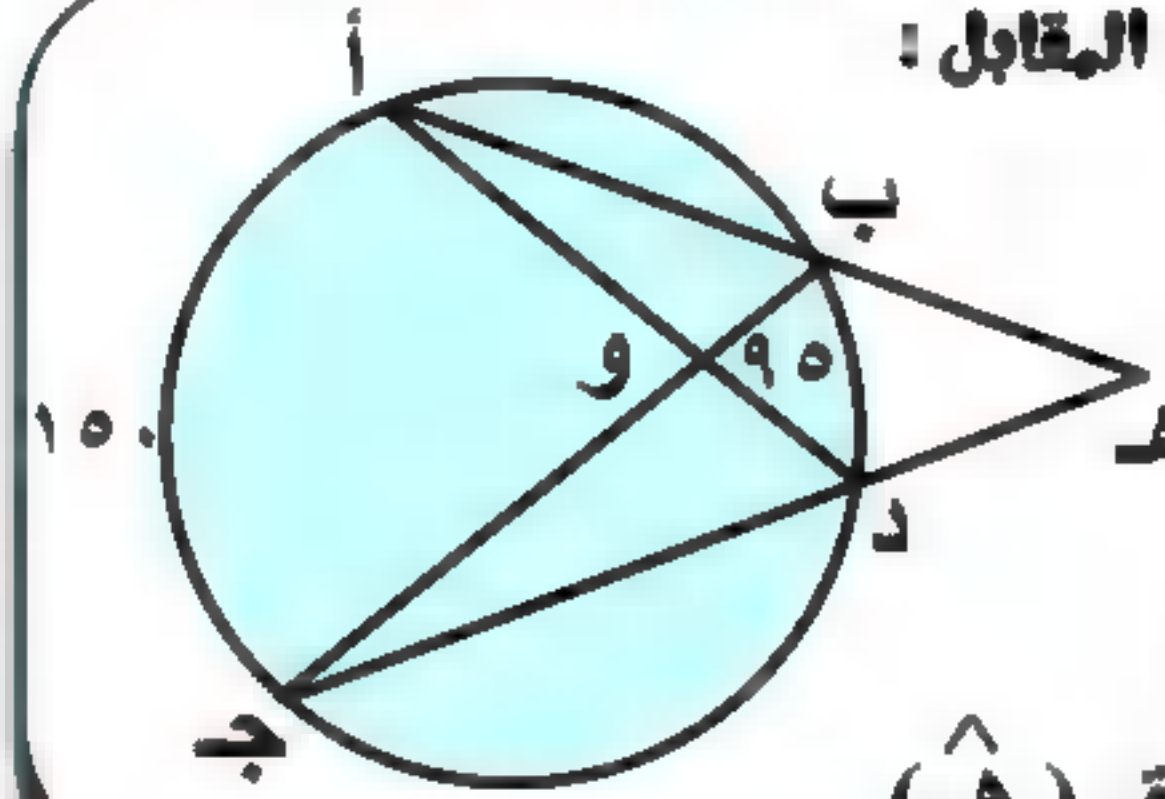
٢ في الشكل المقابل :



ق (أ) = 40° ق (ب د) = 32°
 ق (ب ج) = ق (د هـ)
 أوجد : (١) ق (ج هـ)
 (٢) ق (ب ج)

الحل

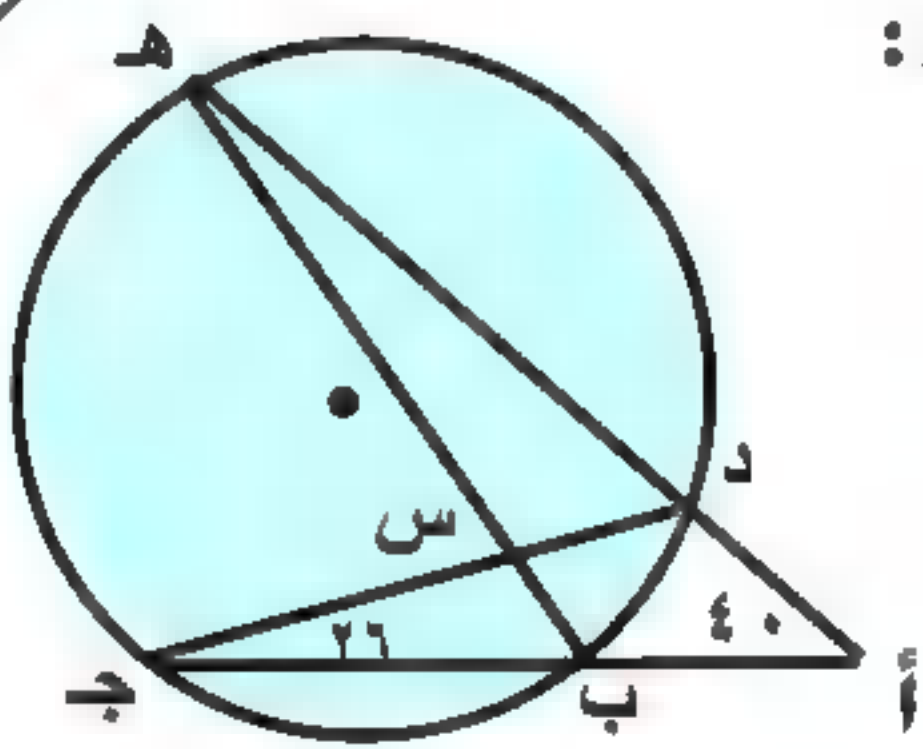
٣ في الشكل المقابل :



ق (ب و د) = 90°
 ق (أ ج) = 150°
 أوجد : (١) ق (ب د)
 (٢) ق (أ) ، ق (هـ)

الحل

٤ في الشكل المقابل :



ق (أ) = 40°
 ق (ب ج د) = 26°
 أوجد : (١) ق (ج هـ)
 (٢) ق (هـ س ج)

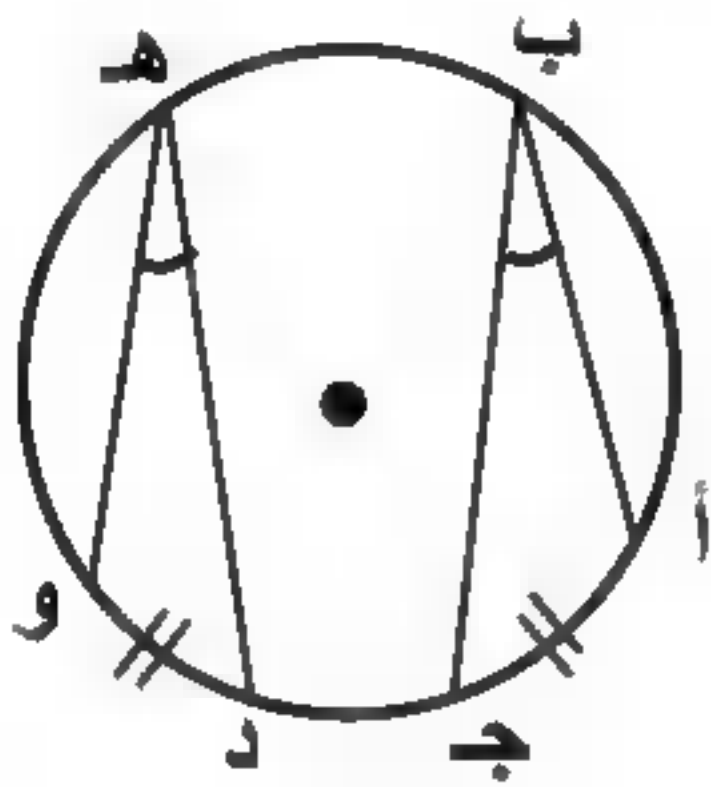
الحل

الزوايا المحيطية المشتركة في القوس

الدرس
الرابع 4

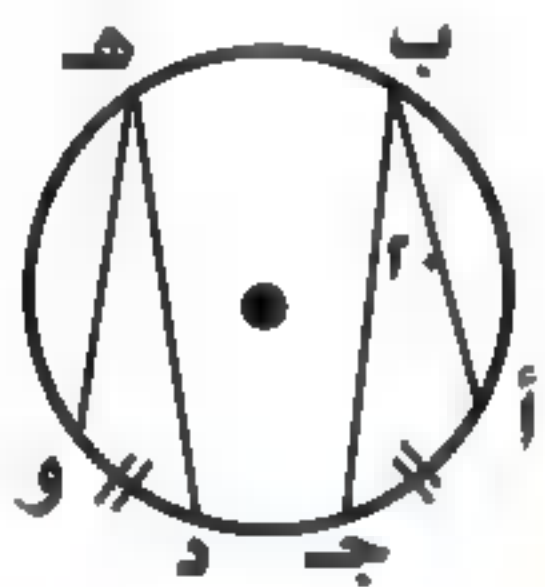
الزوايا المحيطية التي أقواسها
متساوية تكون متساوية في القياس

الزوايا المحيطية المشتركة في نفس
القوس متساوية في القياس

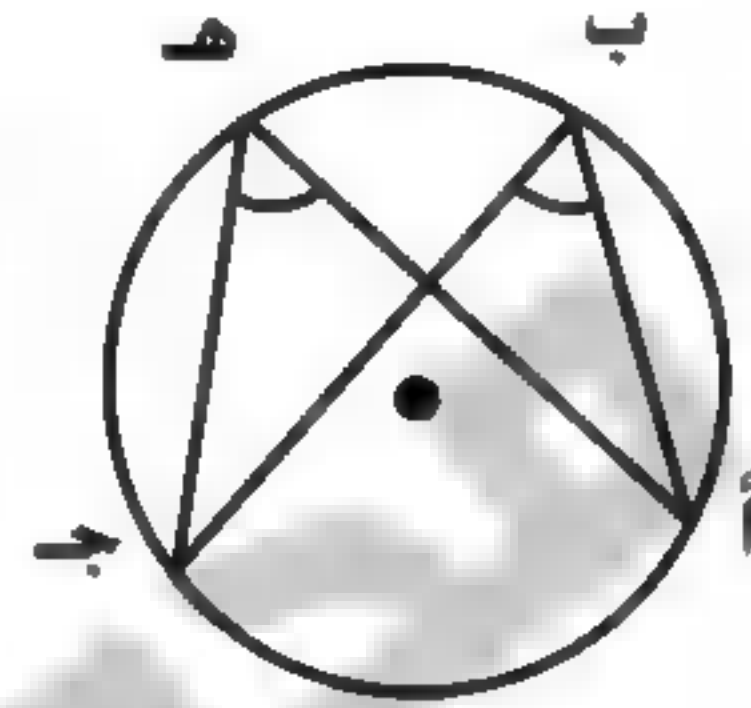


$$\begin{aligned} \therefore \angle AOB &= \angle COD \\ \therefore \angle AOB &= \angle COD \\ (\text{والعكس صحيح}) \end{aligned}$$

فمثلاً : في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \therefore \angle AOB &= 20^\circ \\ \therefore \angle COD &= \dots\dots\dots \\ \text{السبب:} \end{aligned}$$

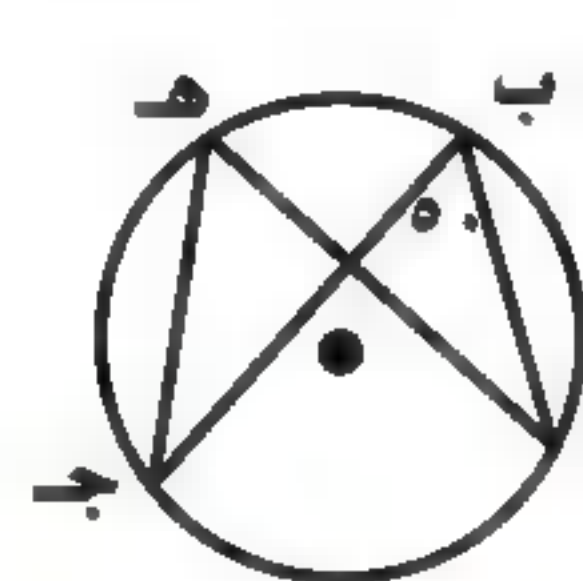


$$\angle AOB = \angle COD$$

محيطيتان مشتركتان في القوس أ ج

$$\text{كذلك: } \angle AOB = \angle COD$$

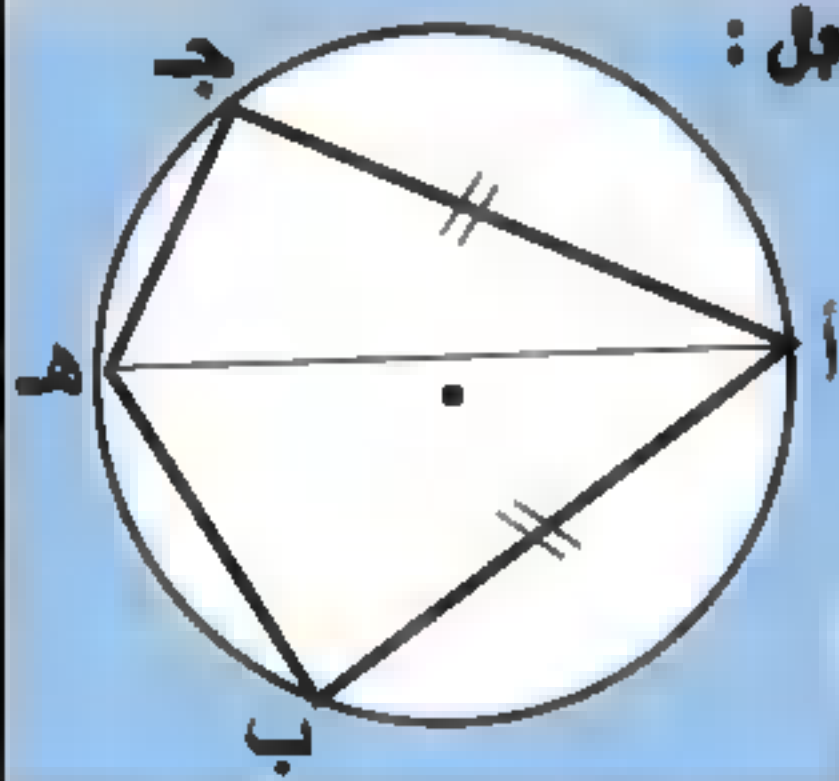
محيطيتان مشتركتان في القوس ب هـ



$$\begin{aligned} \text{فمثلاً : في الشكل المقابل :} \\ \therefore \angle AOB &= 50^\circ \\ \therefore \angle COD &= \dots\dots\dots \\ \text{السبب:} \end{aligned}$$

مثال ٢

في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} AB &= CD \\ \text{أثبت أن :} \\ \angle AOB &= \angle COD \end{aligned}$$

الحل

$$\therefore AB = CD \quad \text{أوتار متساوية}$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COD \quad \text{أقواس متساوية}$$

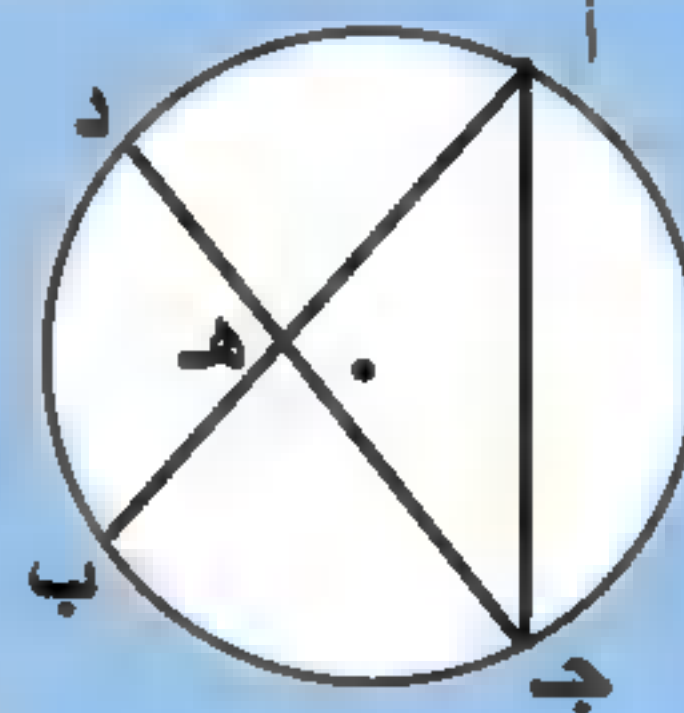
$$\therefore \angle AOB = \angle COD$$

هـ ط ث

القاعدة الأولى: إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأقواس متساوية
القاعدة الثانية: إذا كانت الأقواس متساوية فإن الزوايا المحيطية
المرسومة عليها متساوية

مثال ١

في الشكل المقابل :



أ ب ، ج د وتران متساويان
في الطول
اثبت أن :

$\triangle AOB$ متساوي الساقين

الحل

$$\therefore AB = CD \quad \therefore \angle AOB = \angle COD$$

يطرح ق (د ب) من الطرفين

$$\therefore \angle AOB = \angle COD$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COD$$

$\therefore \triangle AOB$ متساوي الساقين

٥ هو الشكل المقابل :
 أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع
 مرسوم داخل دائرة
 $أد = د هـ$
 أثبت أن :
 $\Delta أ د هـ$ متساوي الأضلاع

الحل

$\Delta أ ب ج$ متساوي الأضلاع

$$\therefore \angle ق (ب) = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ق (د) = \angle ق (ب) = 60^\circ \quad \text{محيطيتان مشتركتان في } أ ج$$

$\Delta أ د هـ$ متساوي الساقين

$$\therefore \angle ق (د أ هـ) = \angle ق (د هـ أ) = 60^\circ$$

$\Delta أ د هـ$ متساوي الأضلاع

هـ ط ث

٣ هو الشكل المقابل :
 أ ب ج مثلث مرسوم
 داخل دائرة
 $د هـ // ب ج$
 أثبت أن :
 $\angle ق (د أ ج) = \angle ق (ب أ هـ)$

الحل

$$\therefore د هـ // ب ج \quad \therefore \angle ق (د ب) = \angle ق (هـ ج)$$

$$\therefore \angle ق (د أ ب) = \angle ق (هـ أ ج) \quad \text{المحيطة}$$

لأنهما محيطيتان أقواسهما متساوية

وبإضافة $\angle ق (ب أ ج)$ للطرفين

$$\therefore \angle ق (د أ ج) = \angle ق (ب أ هـ) \quad \text{هـ ط ث}$$

معلم رياضيات
محمود عوض

٦ هو الشكل المقابل :
 أ د ، ب هـ وتران متساويان في
 الطول في الدائرة
 $أ د \cap ب هـ = ج$
 أثبت أن : $ج د = ج هـ$

الحل

$$\therefore أ د = ب هـ \quad \therefore \angle ق (أ د) = \angle ق (ب هـ)$$

وبإضافة $\angle ق (د هـ)$ للطرفين

$$\therefore \angle ق (أ هـ) = \angle ق (ب د)$$

$$\therefore \angle ق (ب) = \angle ق (أ) \quad \therefore ج أ = ج ب$$

في $\Delta ج أ ب$:

$$\therefore ج أ = ج ب ، د أ = هـ ب$$

بالطرح ينتج أن : $ج د = ج هـ$

٤ هو الشكل المقابل :
 أ ب $\cap ج د = هـ$
 $هـ أ = هـ د$
 أثبت أن : $هـ ب = هـ ج$

الحل

$$\therefore هـ أ = هـ د \quad \therefore \angle ق (أ) = \angle ق (د)$$

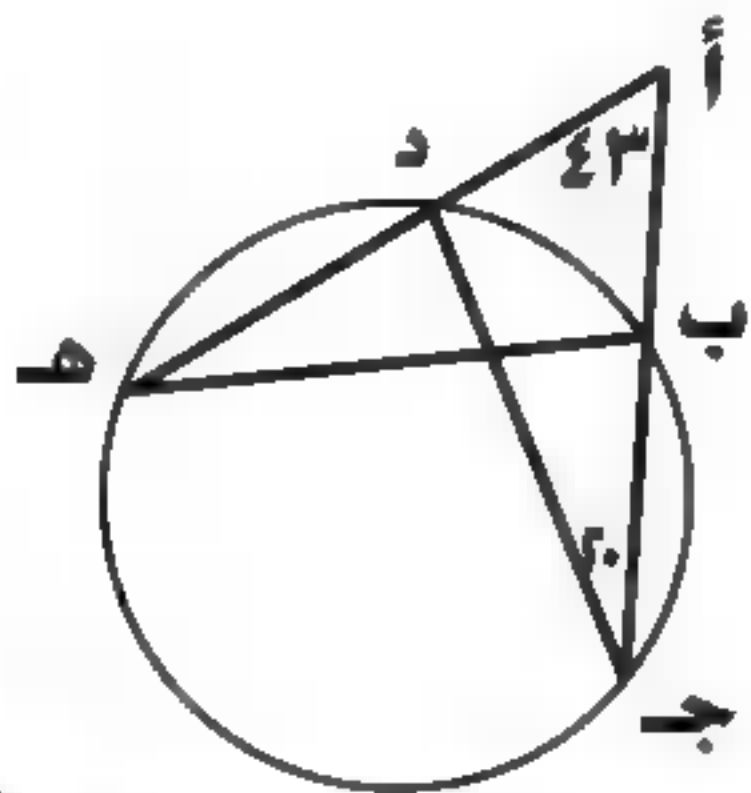
$$\therefore \angle ق (أ) = \angle ق (ج) \quad \text{محيطيتان مشتركتان في د ب}$$

$$\therefore \angle ق (د) = \angle ق (ب) \quad \text{محيطيتان مشتركتان في أ ج}$$

$$\therefore \angle ق (ج) = \angle ق (ب)$$

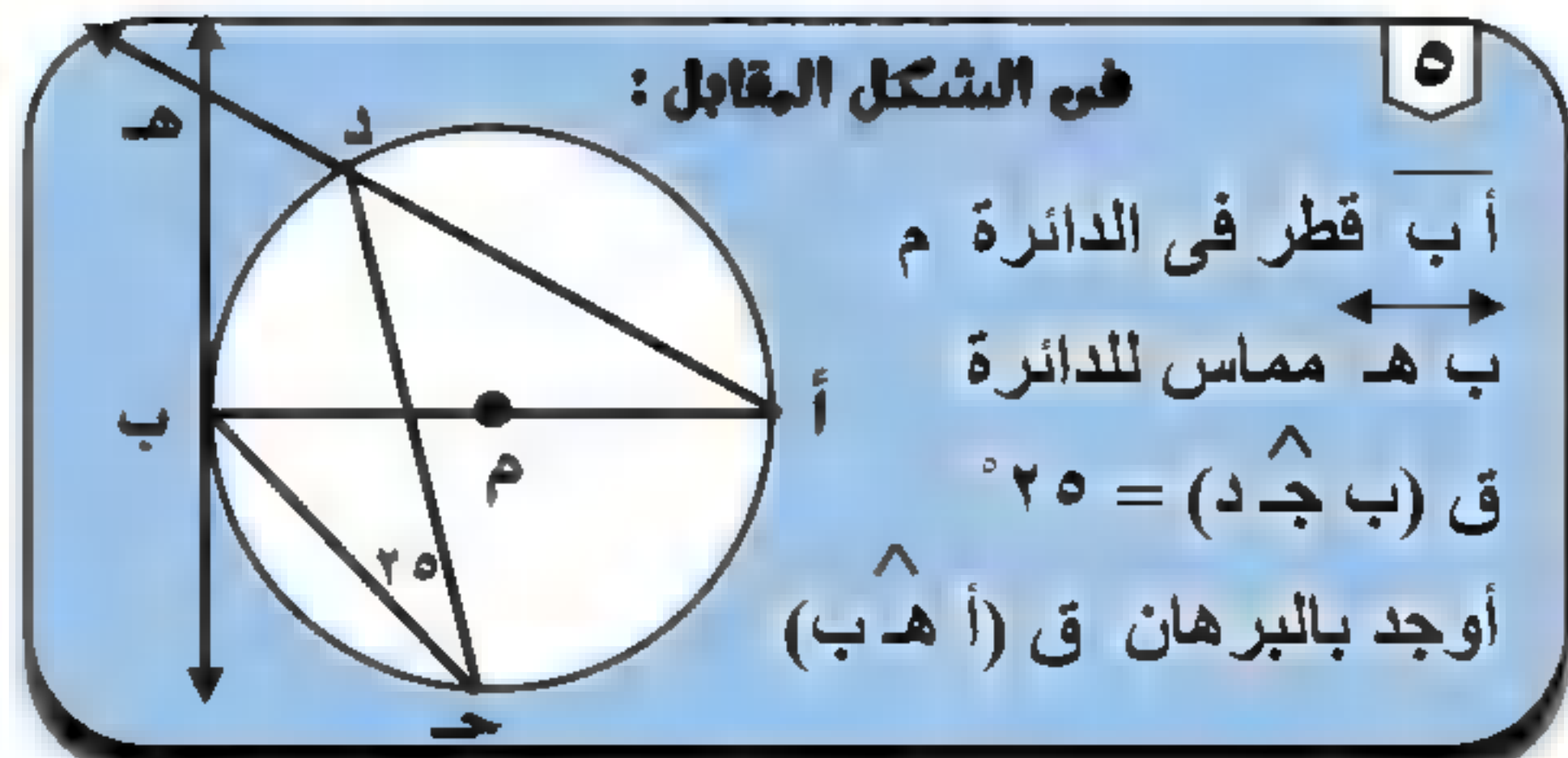
$\Delta هـ ج ب$ متساوي الساقين $\therefore هـ ب = هـ ج$

٦



ق (أ) = 43°
 ق (ج) = 20°
 أوجد: ق (أ ب هـ)

الحل



في الشكل المقابل:

أ ب قطر في الدائرة م
 ب هـ مماس للدائرة
 ق (ب ج د) = 25°
 أوجد بالبرهان ق (أ هـ ب)

الحل

ب هـ مماس ، أ ب قطر
 \therefore ق (هـ ب أ) = 90°

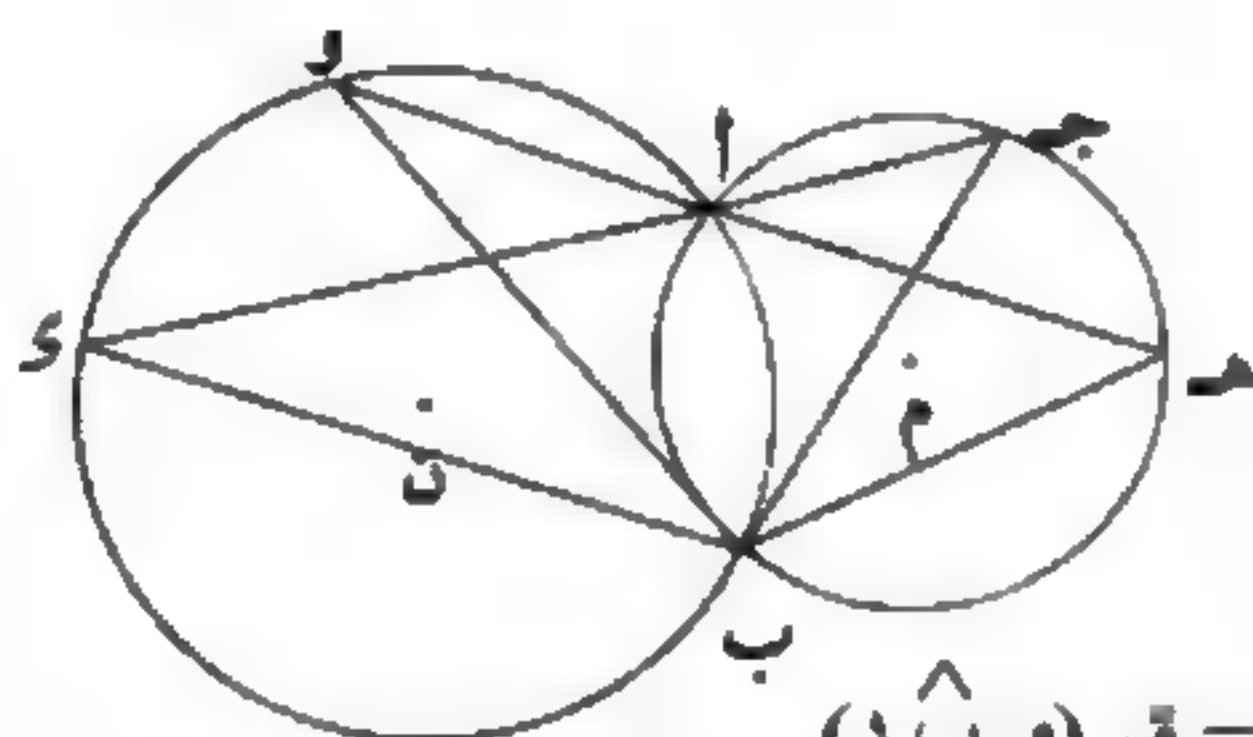
ق (أ) = ق (ج) محيطتان مشتركتان في د ب

\therefore ق (أ) = 25°

في \triangle هـ ب أ:

ق (أ هـ ب) = $180 - (25 + 90) = 65^\circ$

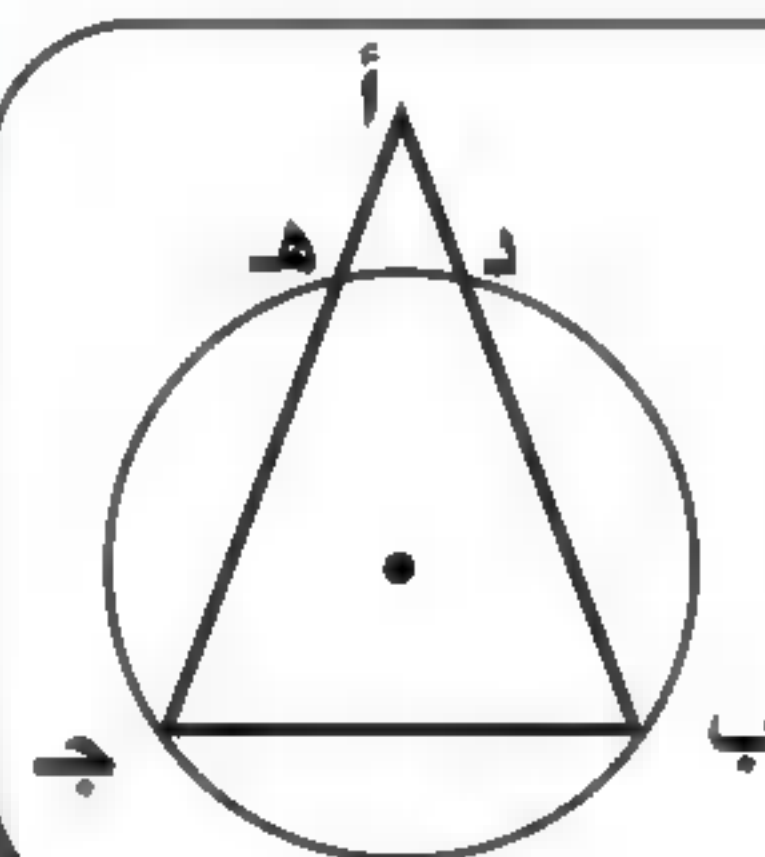
٨



اثبت أن :
 ق (هـ ب ج) = ق (و ب د)

الحل

٧



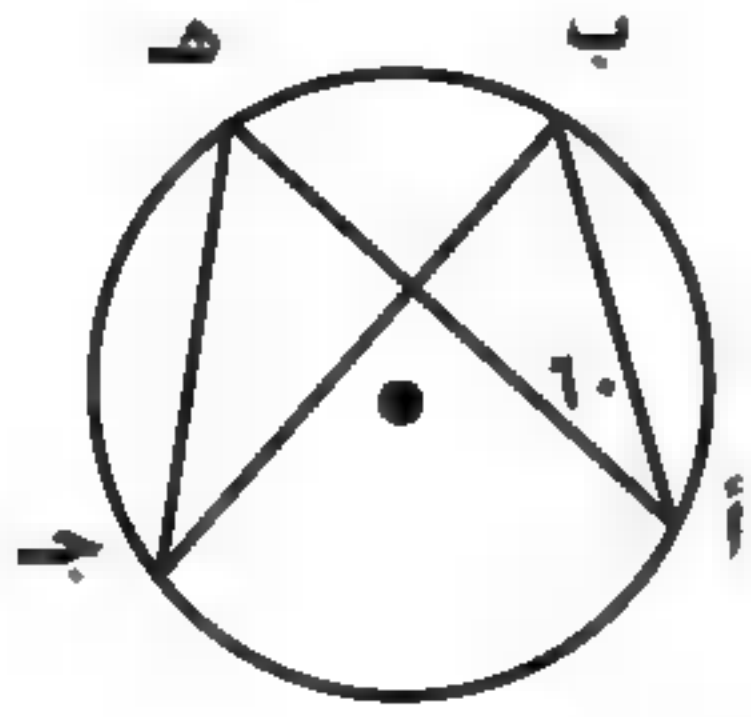
أ ب ج د فيه
 أ ب = أ ج
 اثبت أن :
 ق (د ب) = ق (هـ ج)

الحل

تمارين

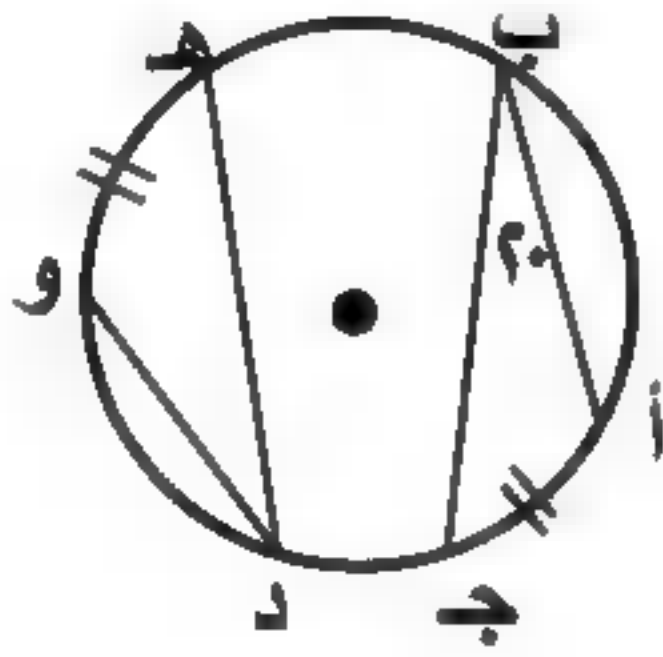
اختر الإجابة الصحيحة:

1 في الشكل المقابل: ق (أ) = ٦٠ فإن ق (ج) =°



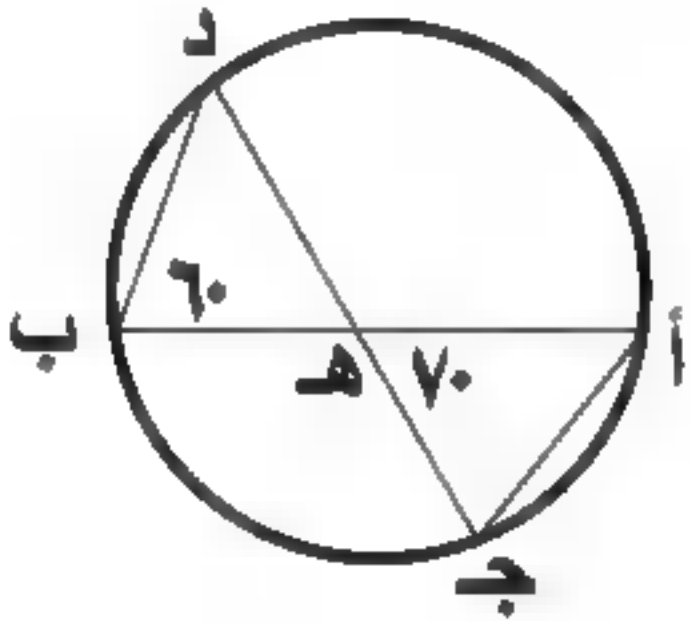
- (أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ٩٠ (د) ١٢٠

2 في الشكل المقابل: ق (أ ج) = ق (هـ و) فإن ق (د) =



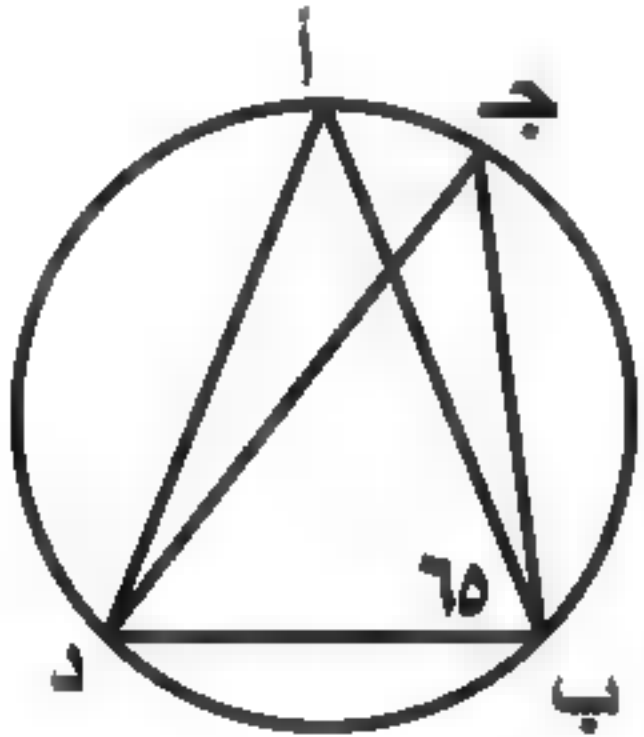
- (أ) ٢٠ (ب) ١٠ (ج) ٤٠ (د) ٨٠

3 في الشكل المقابل: ق (ب) = ٦٠°، ق (أ هـ ج) = ٧٠° فإن ق (أ) =°



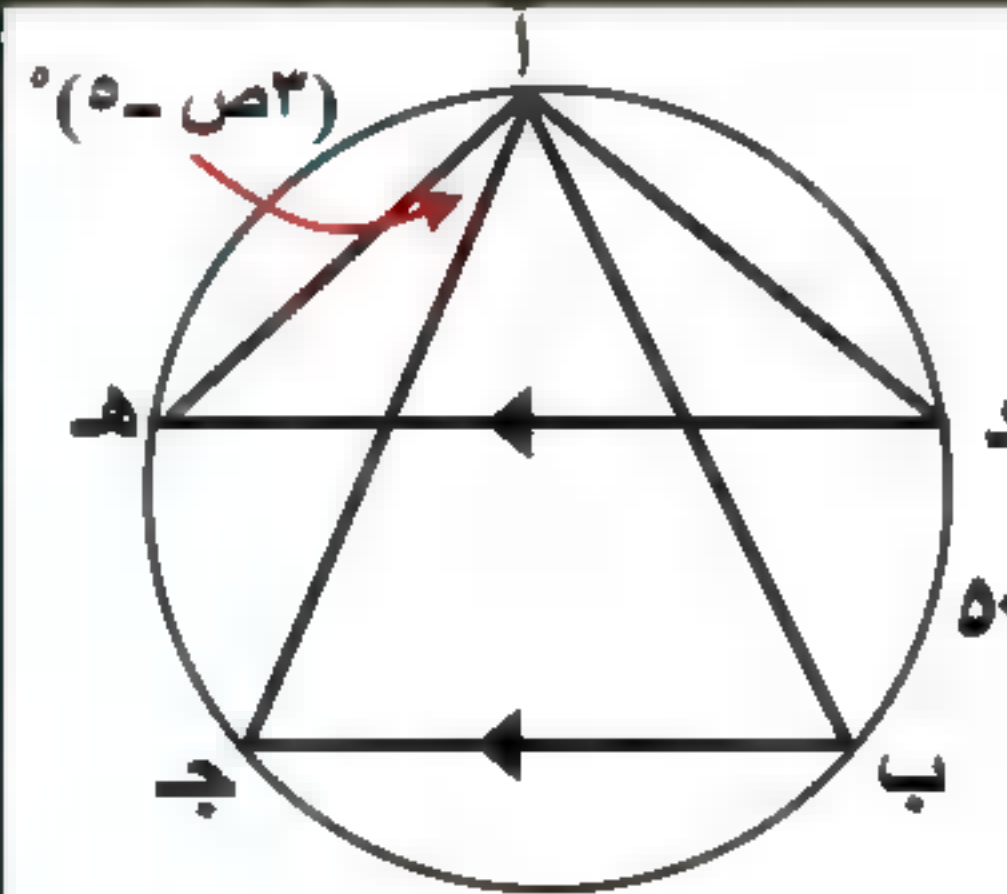
- (أ) ٥٠ (ب) ٦٠ (ج) ٧٠ (د) ٨٠

4 في الشكل المقابل: أب = أد، ق (أ ب د) = ٦٥° فإن ق (ج) =°



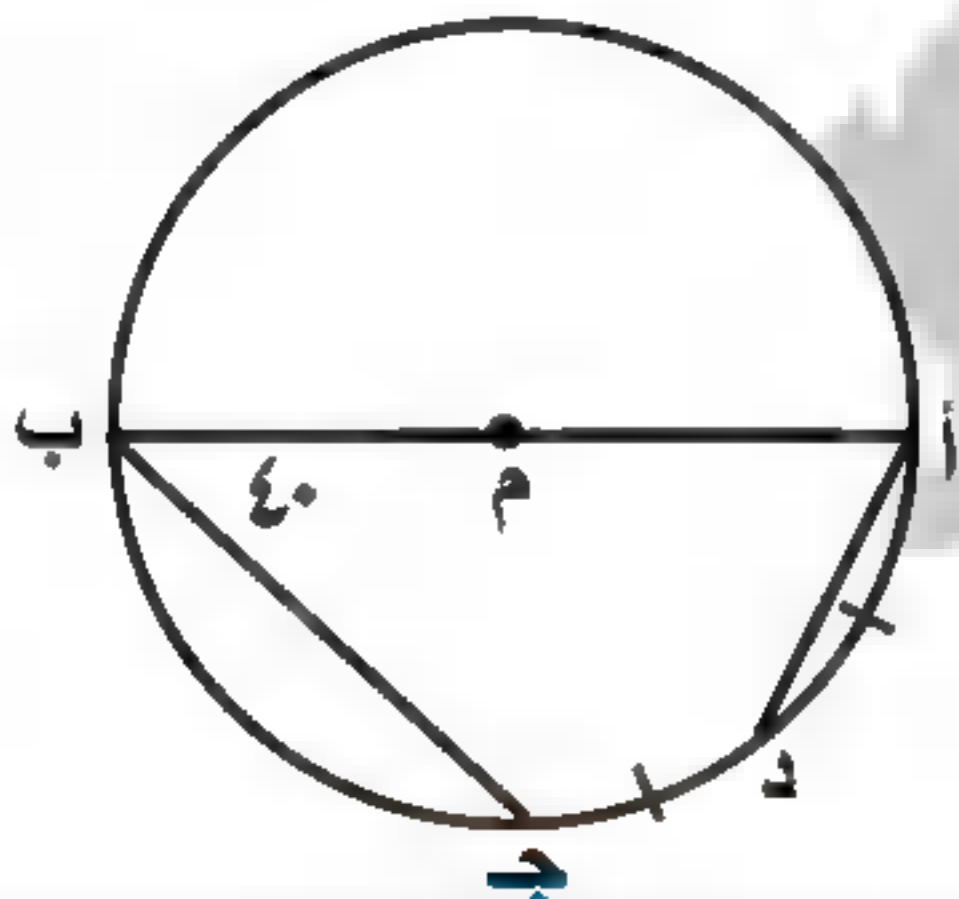
- (أ) ١٥ (ب) ٢٥ (ج) ٣٠ (د) ٥٠

1 في الشكل المقابل:



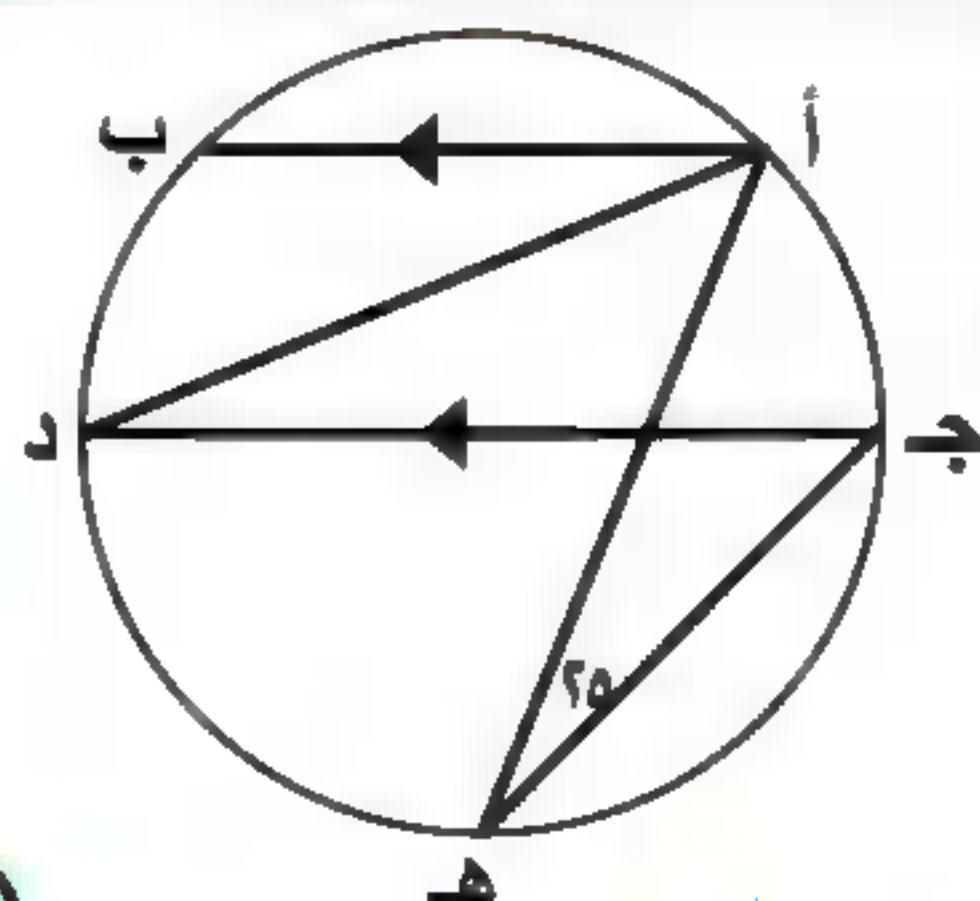
د هـ // ب ج
ق (د ب) = ٥٠°
ق (ج أ هـ) = ٣٠°
أوجد قيمة ص

2 في الشكل المقابل:



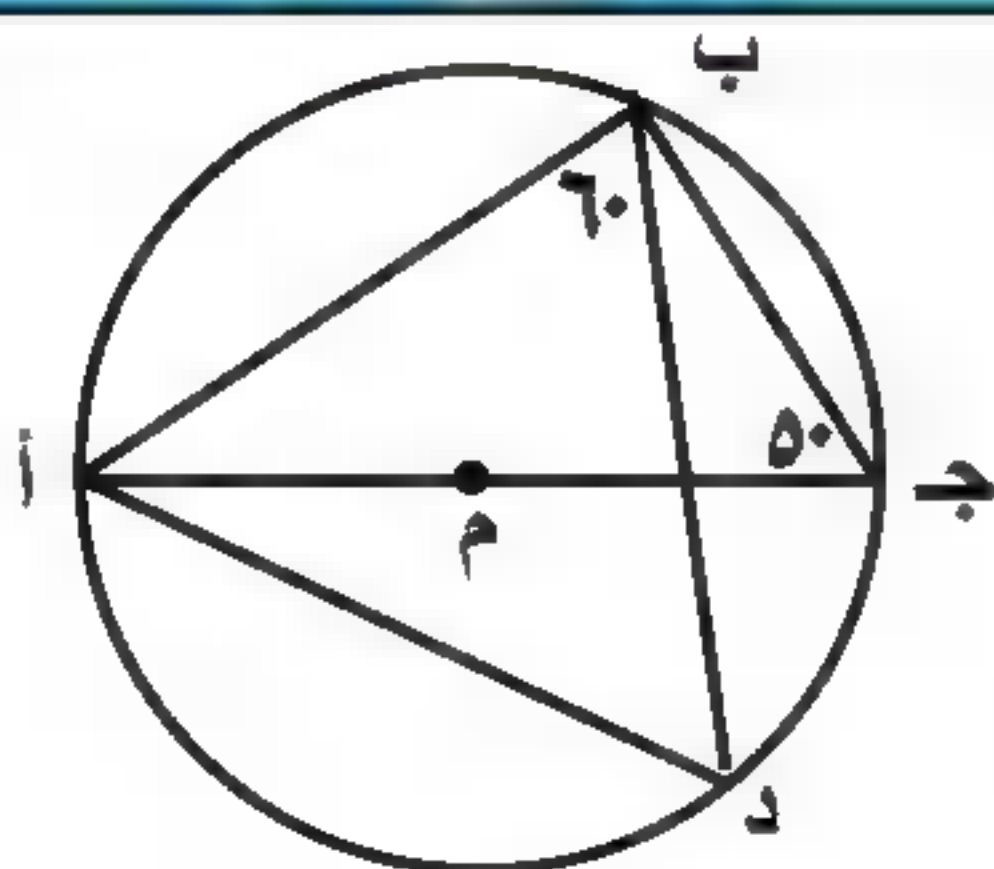
أ ب قطر في الدائرة م
ق (أ ب ج) = ٤٠°
ق (أ د) = ق (د ج)
أوجد ق (د أ ب)

3 في الشكل المقابل:



أ ب، ج د وتران متوازيان
ق (هـ) = ٢٥°
أوجد ق (ب أ د)

4 في الشكل المقابل:



أ ج قطر في الدائرة م
ق (ج) = ٥٠°
ق (أ ب د) = ٦٠°
أوجد: (١) ق (ج ب د)
(٢) ق (ب أ د)

الشكل الرباعي الدائري

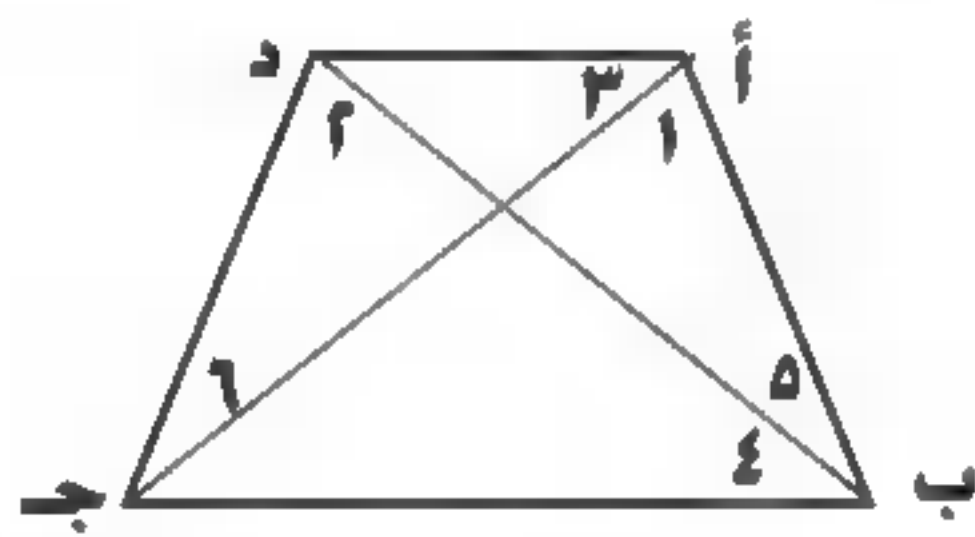
الدرس
5
الخامس

الشكل الرباعي الدائري : هو شكل رباعي تنتمي رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة .

أي يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الأربعة

لو عرفت ان الشكل رباعي دائري (سواء هو قالك في المسألة أو لقيت رؤوسه الأربعة تقع على الدائرة) استنتج ٣ حاجات :

أي زاويتان مرسومتان على
قاعدة واحدة وفي جهة واحدة
منها متساويتان



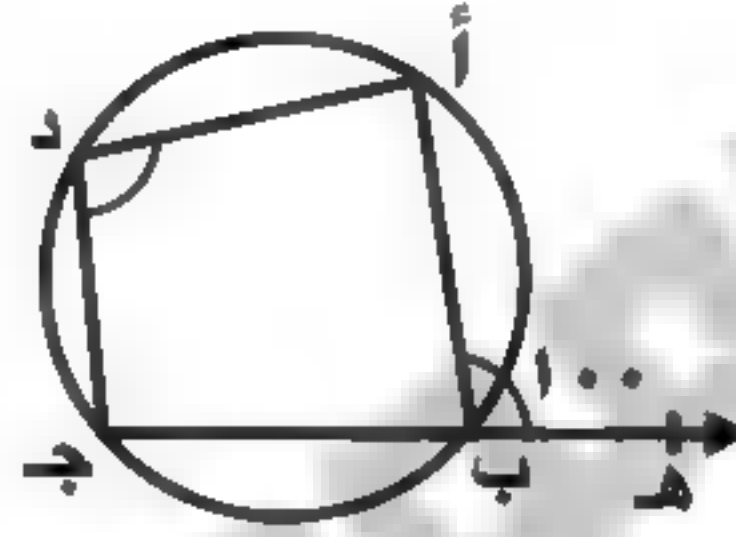
إذا كان أ ب ج د رباعي دائري فإن:

$$\angle 1 = \angle 2 \quad \text{ق (1) = ق (2) مرسومتان على ب ج}$$

$$\angle 3 = \angle 4 \quad \text{ق (3) = ق (4) مرسومتان على د ج}$$

$$\angle 5 = \angle 6 \quad \text{ق (5) = ق (6) مرسومتان على أ د}$$

قياس الزاوية الخارجة =
قياس المقابلة للمجاورة

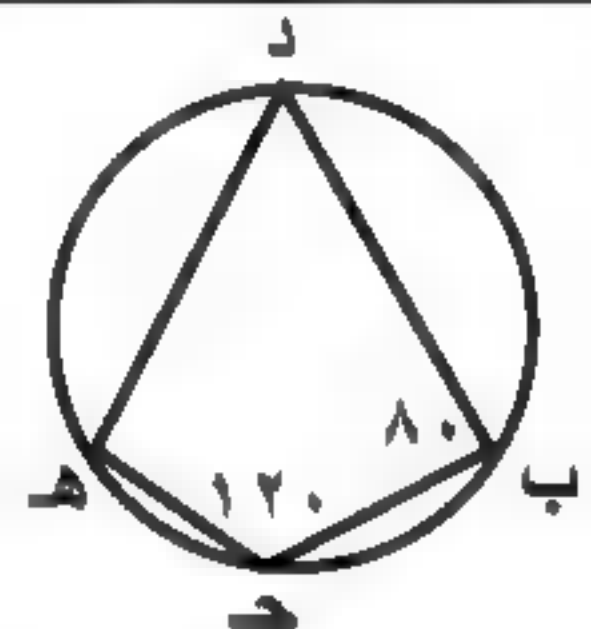


الشكل أ ب ج د رباعي دائري

$$\angle 100 = \angle \text{الخارجة} = \angle \text{ق (د)}$$

$$\angle 100 = \angle \text{ق (د)}$$

كل زاويتان متقابلتان
مجموعهما = ١٨٠



الشكل أ ب ج د رباعي دائري

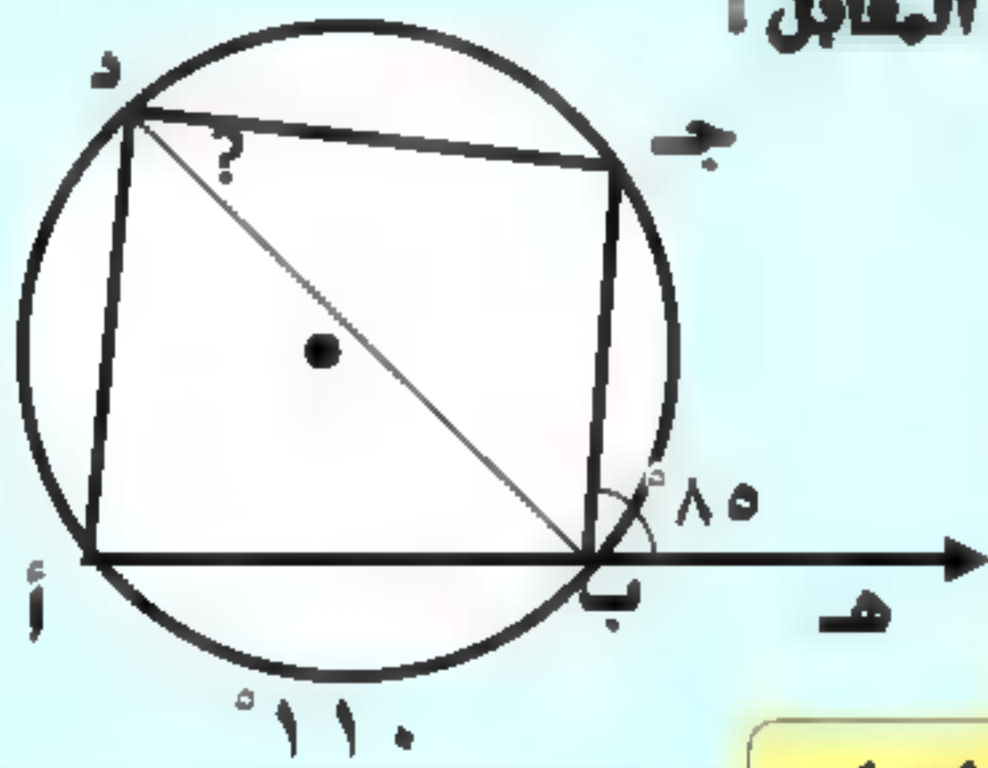
$$\angle 180 = \angle \text{ق (ب)} + \angle \text{ق (د)}$$

$$\angle 180 = \angle \text{ق (ب)} + \angle \text{ق (د)}$$

$$\angle 60 = 120 - 180 = \angle \text{ق (د)}$$

$$\angle 100 = 80 - 180 = \angle \text{ق (ب)}$$

مثال ٢ في الشكل المقابل



أ ب هـ

$$\angle 110 = \angle \text{ق (أ ب)}$$

$$\angle 85 = \angle \text{ق (ج ب هـ)}$$

أوجد ق (ب د ج)

الحل

$$\angle 110 = \angle \text{ق (أ ب)}$$

$$\angle 55 = \frac{110}{2} = \angle \text{ق (أ ب) المحيطية} = \frac{1}{2} \angle \text{ق (أ ب)}$$

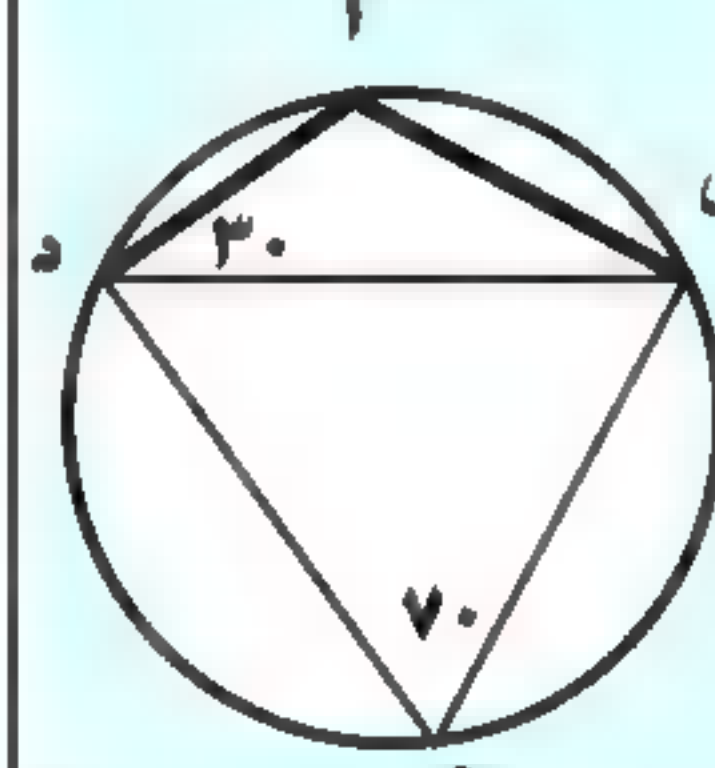
ج ب هـ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب ج د

$$\angle 85 = \angle \text{ق (ج ب هـ)} = \angle \text{ق (ج د أ)}$$

$$\angle \text{ق (ب د ج)} = \angle \text{ق (ج د أ)} - \angle \text{ق (ب د أ)}$$

$$30 = 85 - 55$$

مثال ١ في الشكل المقابل



أ ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل

دائرة ، ق (ج د) = 70 ،

ق (أ د ب) = 30

أوجد : ق (أ ب د)

الحل

أ ب ج د رباعي دائري

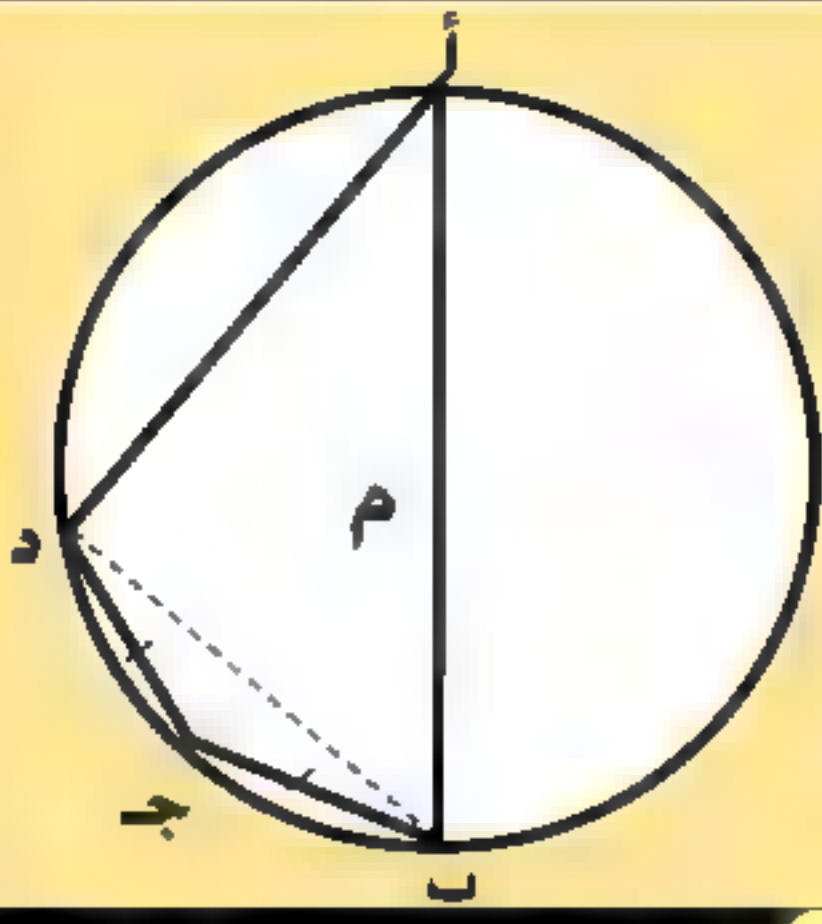
$$\angle 180 = \angle \text{ق (أ)} + \angle \text{ق (ج د)}$$

$$\angle 110 = 70 - 180 = \angle \text{ق (أ)}$$

في Δ أ ب د :

$$\angle \text{ق (أ ب د)} = 180 - (30 + 110) = 40$$

تصميم
معلم رياضيات
محمود عوض



٤ في الشكل المقابل :
أ ب ج د شكل رباعي مرسوم
داخل الدائرة م
ج ب = ج د
ق (ب ج د) = ١٤٠°
أوجد: ١- ق (أ) ٢- ق (د)

الحل العمل نرسم ب د

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

$$\therefore \text{ق (أ)} + \text{ق (ج)} = ١٨٠^\circ$$

$$\therefore \text{ق (أ)} = ١٨٠ - ١٤٠ = ٤٠^\circ \quad \text{المطلوب الاول}$$

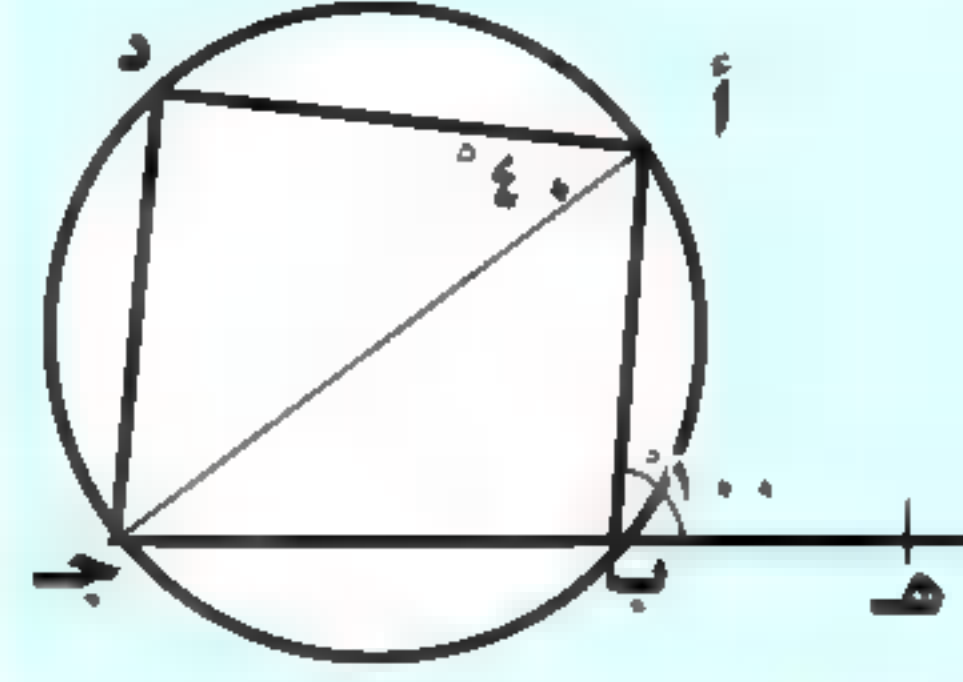
في $\triangle ج ب د$:

$$\therefore ج ب = ج د \quad \therefore \text{ق (ج ب د)} = \text{ق (ج د ب)}$$

$$\therefore \text{ق (ج د ب)} = \frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢} = ٢٠^\circ$$

$$\therefore \text{ق (أ د ب)} = ٩٠^\circ \quad \text{محيطية مرسومة في نصف دائرة}$$

$$\therefore \text{ق (د)} = ٩٠ + ٢٠ = ١١٠^\circ$$



٣ في الشكل المقابل :
ق (أ ب هـ) = ١٠٠°
ق (ج أ د) = ٤٠°
اثبت أن :
ق (ج د) = ق (أ د)

الحل

∴ أ ب هـ زاوية خارجة عن الرباعي الدائري أ ب ج د

$$\therefore \text{ق (د)} = \text{ق (أ ب هـ)} = ١٠٠^\circ$$

في $\triangle أ د ج$:

$$\text{ق (أ ج د)} = ١٨٠ - (٤٠ + ١٠٠) = ٤٠^\circ$$

$$\therefore \text{ق (د أ ج)} = \text{ق (أ ج د)} = ٤٠^\circ$$

$$\therefore أ د = د ج$$

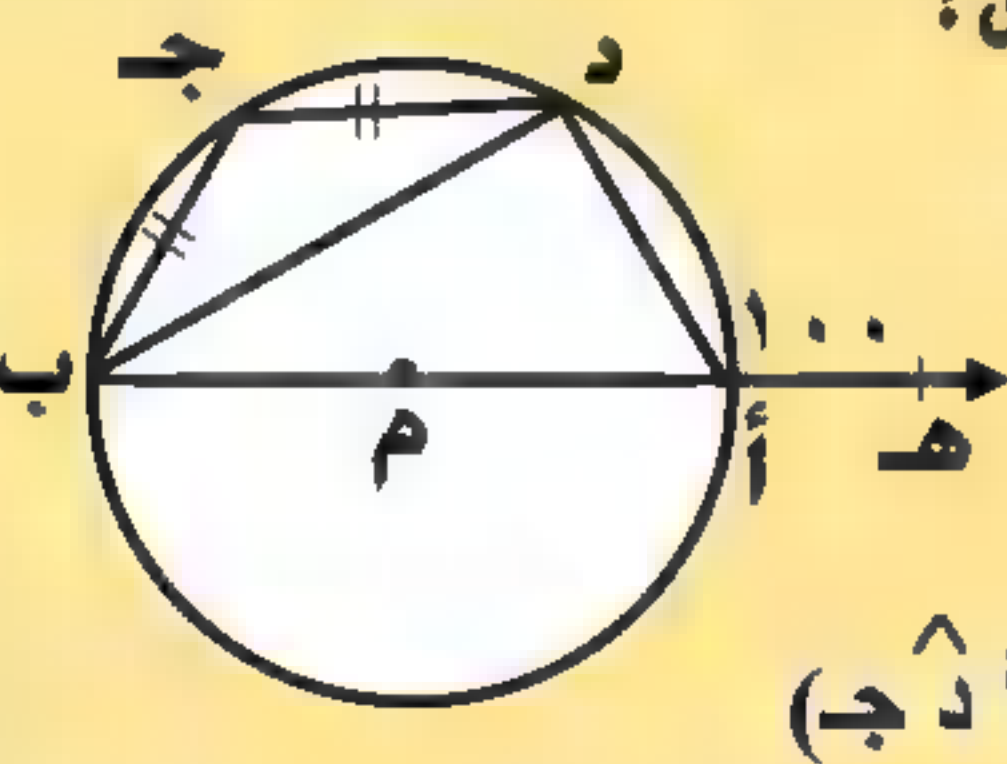
$$\therefore \text{ق (ج د)} = \text{ق (أ د)}$$

هـ طث

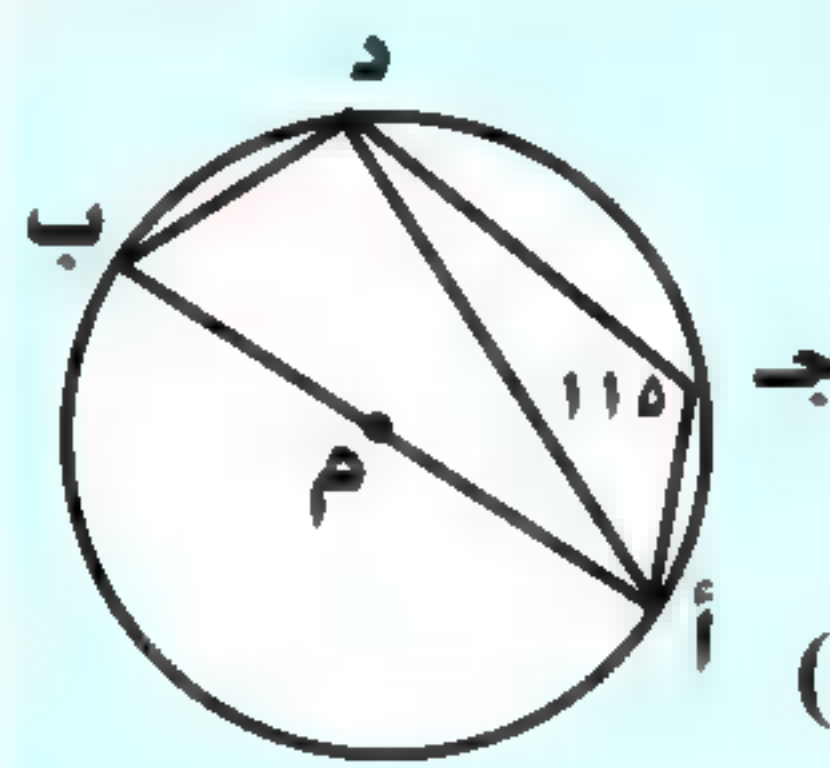
تصميم محمود عوض م
معلم رياضيات

تدريبات

تصميم محمود عوض م
معلم رياضيات



٦ في الشكل المقابل :
أ ب قطر في الدائرة م
ق (د أ هـ) = ١٠٠°
ج د = ج ب
أوجد بالخطوات : ق (أ د ج)



٥ في الشكل المقابل :
أ ب قطر في الدائرة م
ق (أ ج د) = ١١٥°
أوجد بالبرهان : ق (د أ ب)

تمارين

اختر الإجابة الصحيحة:

1 الشكل الرباعي الدائري في الأشكال التالية هو

(أ) المعين (ب) المستطيل (ج) متوازي الأضلاع (د) شبه المنحرف

1 أ ب ج د شكل رباعي دائري فيه $\angle ق = 60^\circ$ فإن $\angle ج =$

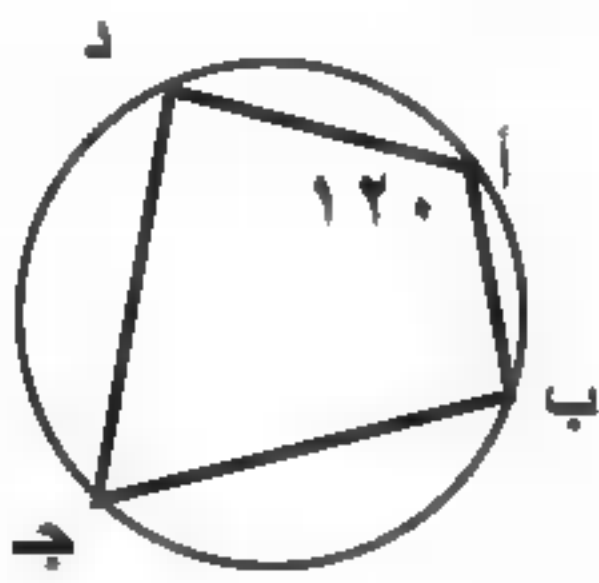
(أ) 60° (ب) 30° (ج) 90° (د) 120°

3 إذا كان الشكل أ ب ج د رباعي دائري وكان $\angle ق = \frac{1}{4} \angle ج$ فإن $\angle أ =$

(أ) 90° (ب) 60° (ج) 120° (د) 180°

4 في الشكل المقابل : $\angle أ = 120^\circ$ فإن $\angle ج =$

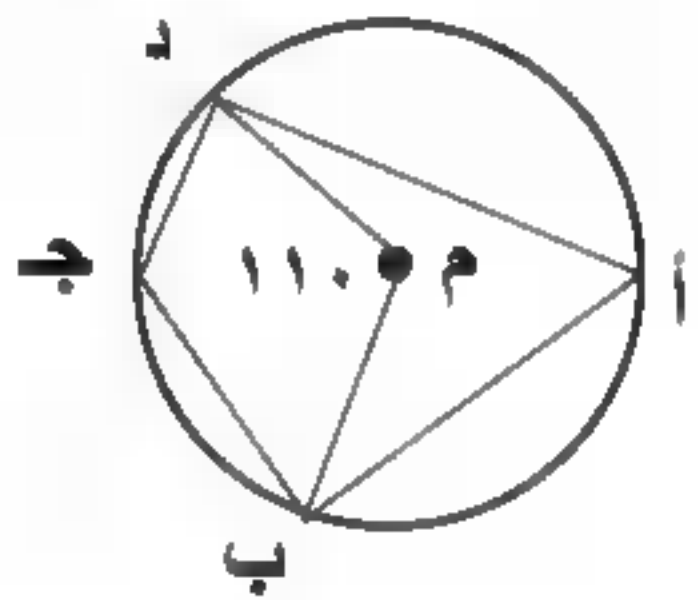
(أ) 60° (ب) 90° (ج) 120° (د) 180°



5 في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

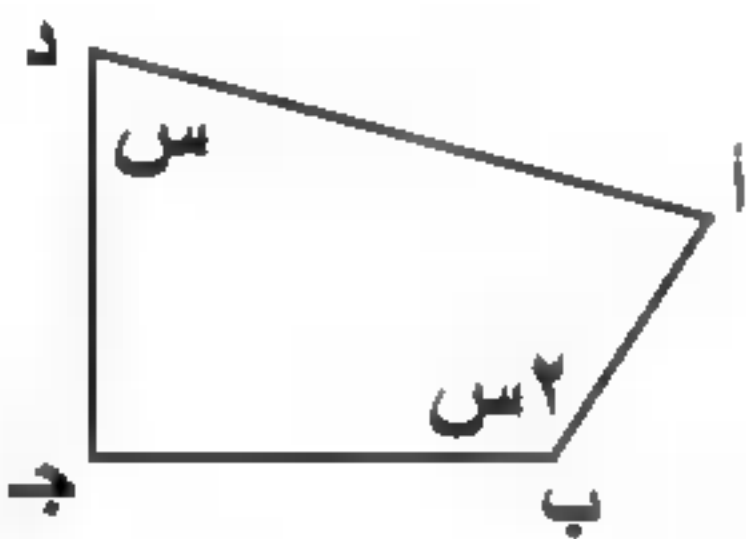
ق (ب م د) $= 110^\circ$ فإن ق (ج) $=$

(أ) 70° (ب) 110° (ج) 125° (د) 55°



6 في الشكل المقابل : أ ب ج د شكل رباعي دائري فإن س $=$

(أ) 120° (ب) 100° (ج) 60° (د) 50°



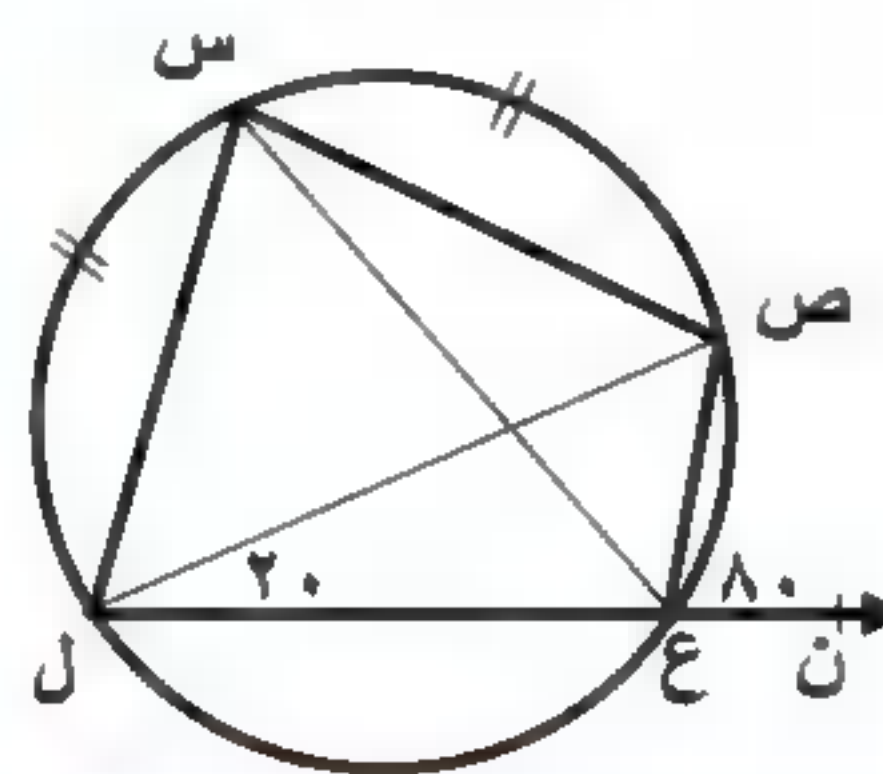
1 س منتصف ص ل

ق (ص ع ن) $= 80^\circ$

ق (ص ل ع) $= 20^\circ$

أوجد : (١) ق (ع س ل)

(٢) ق (س ص ع)



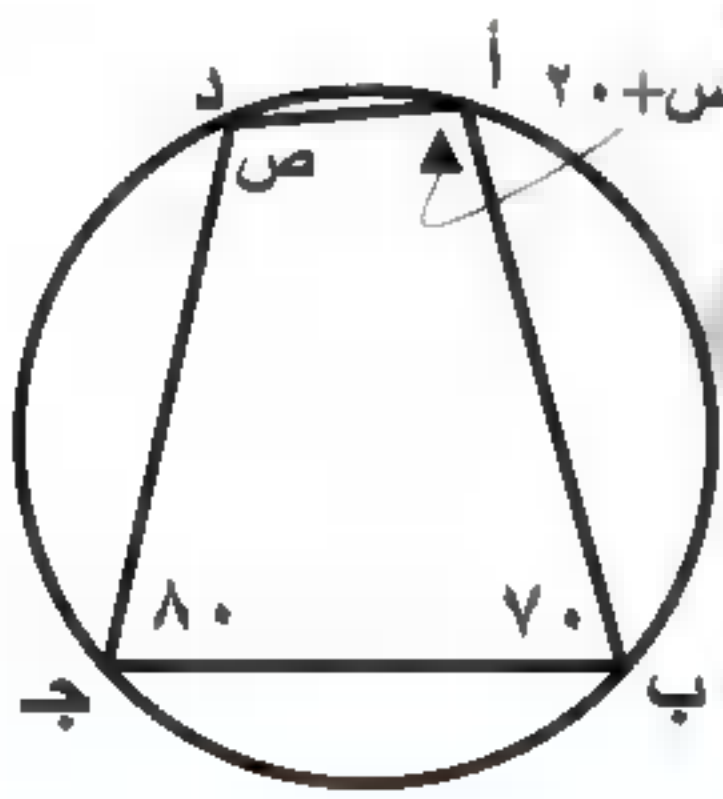
3 ق (ب) $= 70^\circ$

ق (ج) $= 80^\circ$

ق (د) $=$ ص

ق (أ) $= 20 + س$

أوجد قيمتي س ، ص

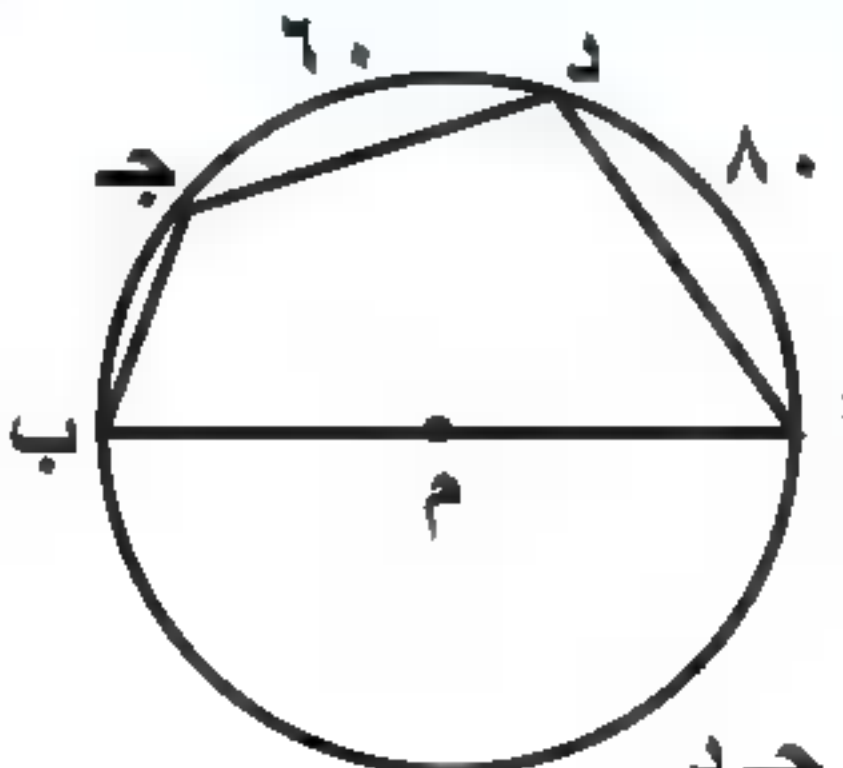


4 أ ب قطر في الدائرة م

ق (أ د) $= 80^\circ$

ق (د ج) $= 60^\circ$

أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب ج د



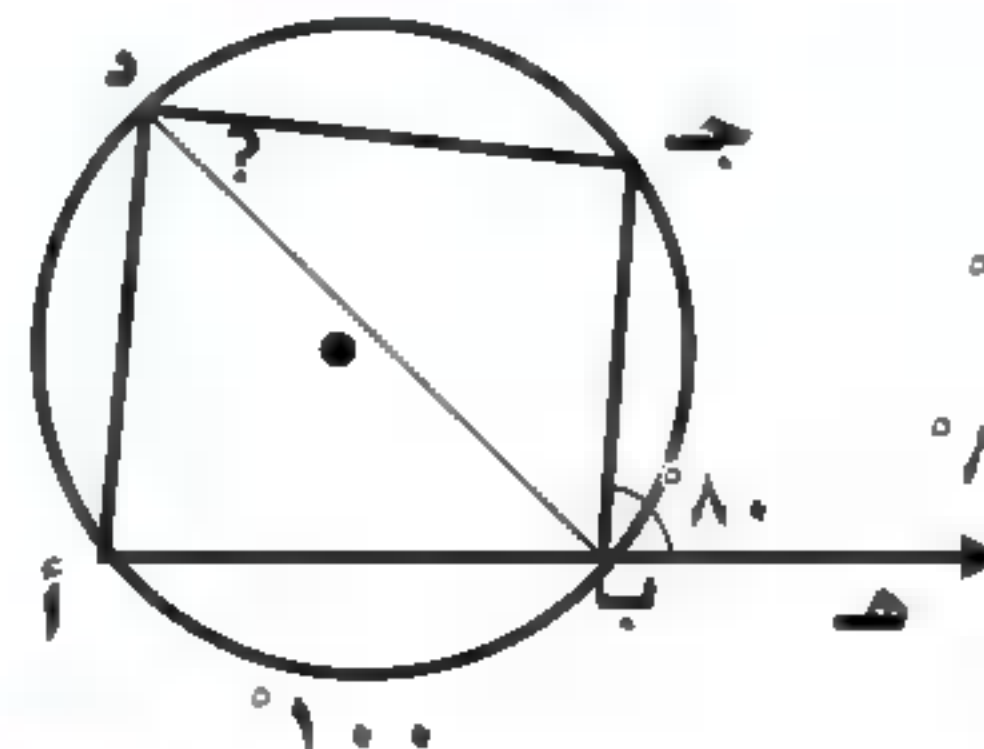
2

هـ أ ب

ق (أ ب) $= 100^\circ$

ق (ج ب هـ) $= 80^\circ$

أوجد ق (ب د ج)



إثبات أن الشكل رباعي دائري

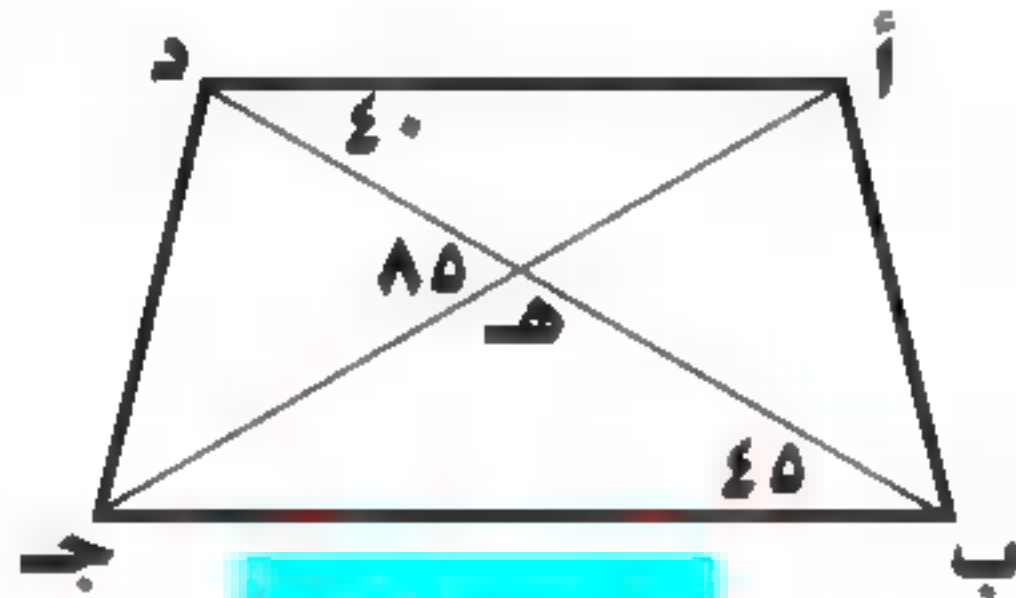
الدرس
6 السادس

لو قالك اثبت أن الشكل رباعي دائري إبحث عن إحدى الحالات الثلاثة الآتية واثبتها:

زاويتان مرسومتان على
قاعدة واحدة ومتساويتان

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : أ ب ج د رباعي دائري



طريقة الحل

شايف الزاوية ٨٥ ؟

دى خارجة عن $\triangle HBC$

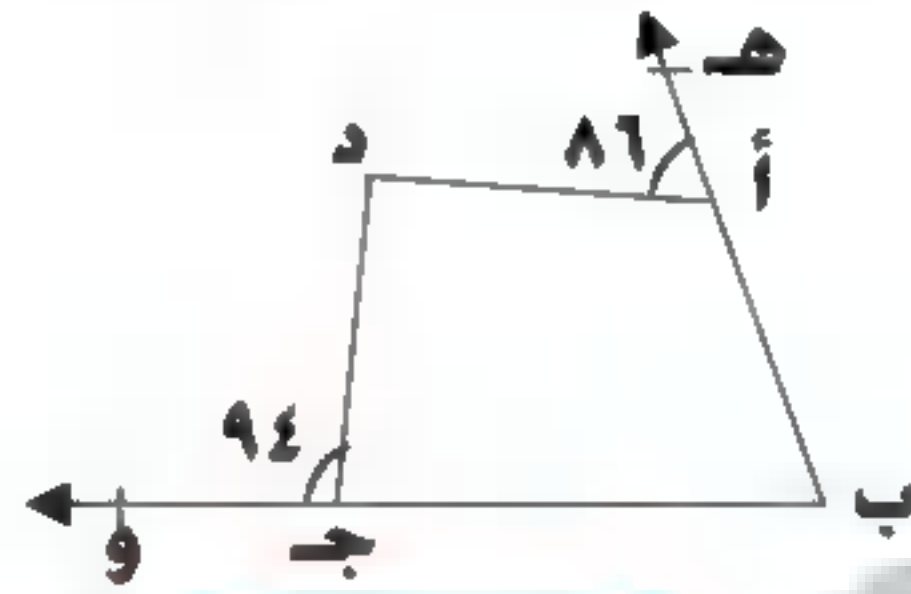
$$\therefore \angle AHC = \angle BHD + \angle CHD = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين
ومرسومتين على قاعدة واحدة
وهما $\angle AHC = \angle BHD$
 \therefore الشكل رباعي دائري

زاوية خارجة قياسها =
قياس المقابلة للمجاورة

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : أ ب ج د رباعي دائري



طريقة الحل

شايف الزاوية ٩٤ ؟

هي واللى جنبها زاوية مستقيمة

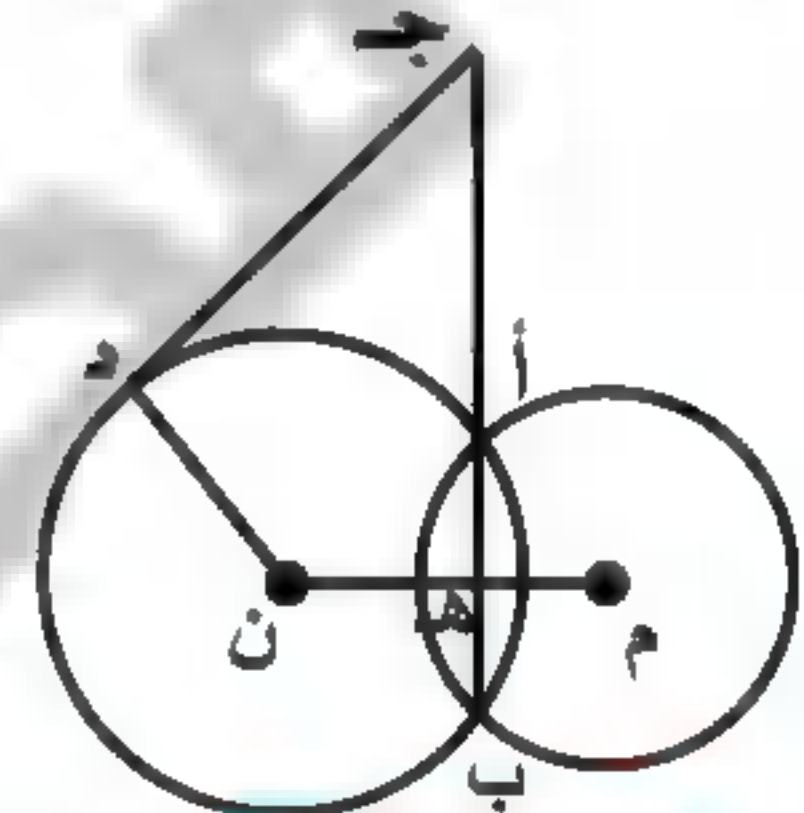
$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين
الخارجة = المقابلة للمجاورة
وهما $\angle ADE = \angle BCD$
 \therefore الشكل رباعي دائري

زاويتان متقابلتان
واثبت أن :
مجموعهما = ١٨٠

مثال لذيد

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : ج ه ن د رباعي دائري



طريقة الحل

في الشكل ج ه ن د

$$\angle D = 90^\circ \text{ (شأن المماس)}$$

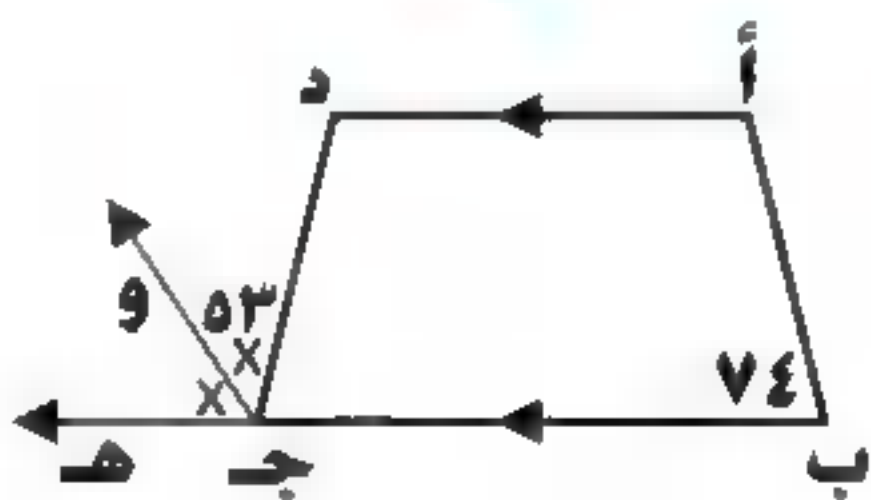
$$\angle H = 90^\circ \text{ (شأن الوتر المشترك)}$$

و الزاويتين د ، ه متقابلتين

$$\text{ولو جمعناهم} = 180^\circ$$

\therefore الشكل رباعي دائري

حاول بنفسك



في الشكل المقابل :

$$AD \parallel BC$$

ج وينصف د ج ه

$$\angle ADE = 53^\circ$$

$$\angle B = 74^\circ$$

اثبت أن : أ ب ج د رباعي دائري

سؤال مهم :

اذكر ٣ حالات يكون فيها الشكل الرباعي دائرياً ؟

الإجابة :

- ١- إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان
- ٢- إذا وجد زاوية خارجة قياسها = المقابلة للمجاورة
- ٣- إذا وجد زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها ومتساويتان

الحل

∴ اُس ب ص رباعی دائری

الحل

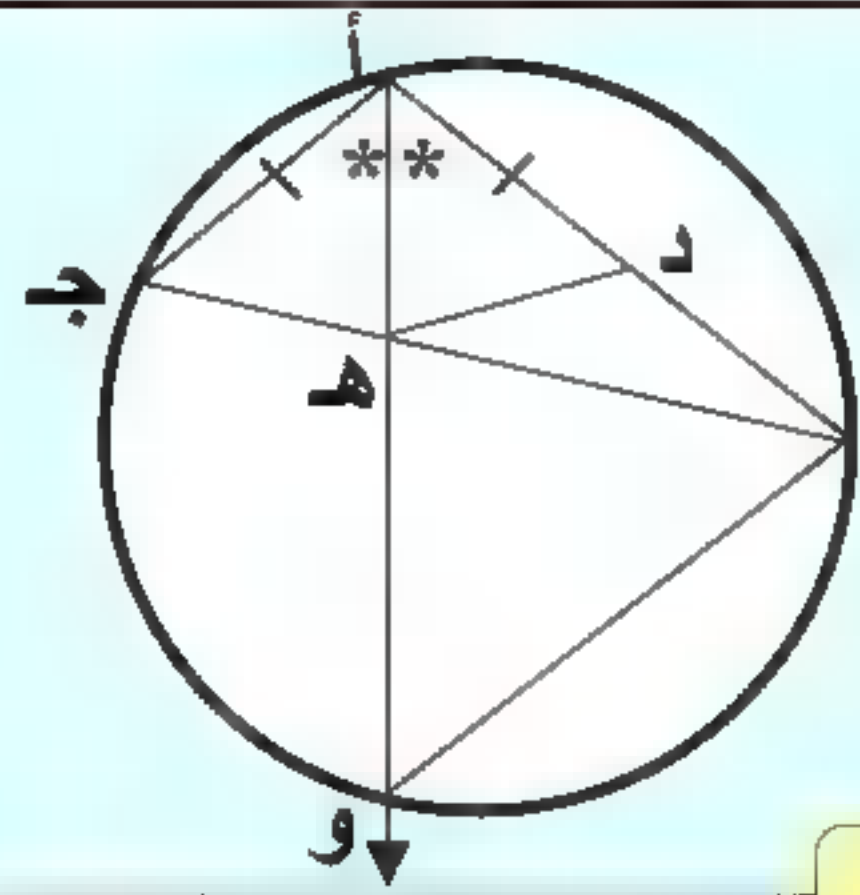
∴ الشكل أ ج د هـ رباعي دائري

الحل

من ١ ، ٢ ينتج أن : $ق(د ص ب) = ق(د ب س)$

الحل

ص س // ب ج



أد = أج،

أو ينصف ب أج

اثبت أن:

د ب هـ و رباعي دائري

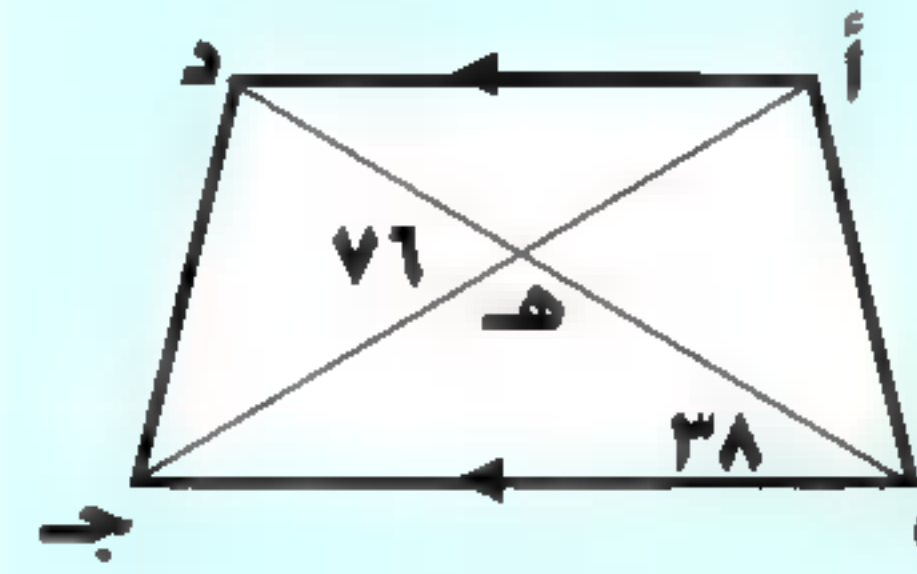
الحل $\triangle ADE, \triangle BHE$ فيهما: $\angle AHE = \angle BHE$ (زاوية عمودية)

أد = أج

أه ضلع مشترك

 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle BHE$ $\therefore \angle AHE = \angle BHE$ (زاوية عمودية) $\therefore \angle AHE = \angle BHE$ (زاوية عمودية)

(لأنهما محيطيتان مشتركتان في القوس أب)

من ١، ٢: $\therefore \angle AHE = \angle BHE$ (زاوية عمودية) \therefore الشكل د ب هـ و رباعي دائري

أ ب ج د شكل رباعي فيه

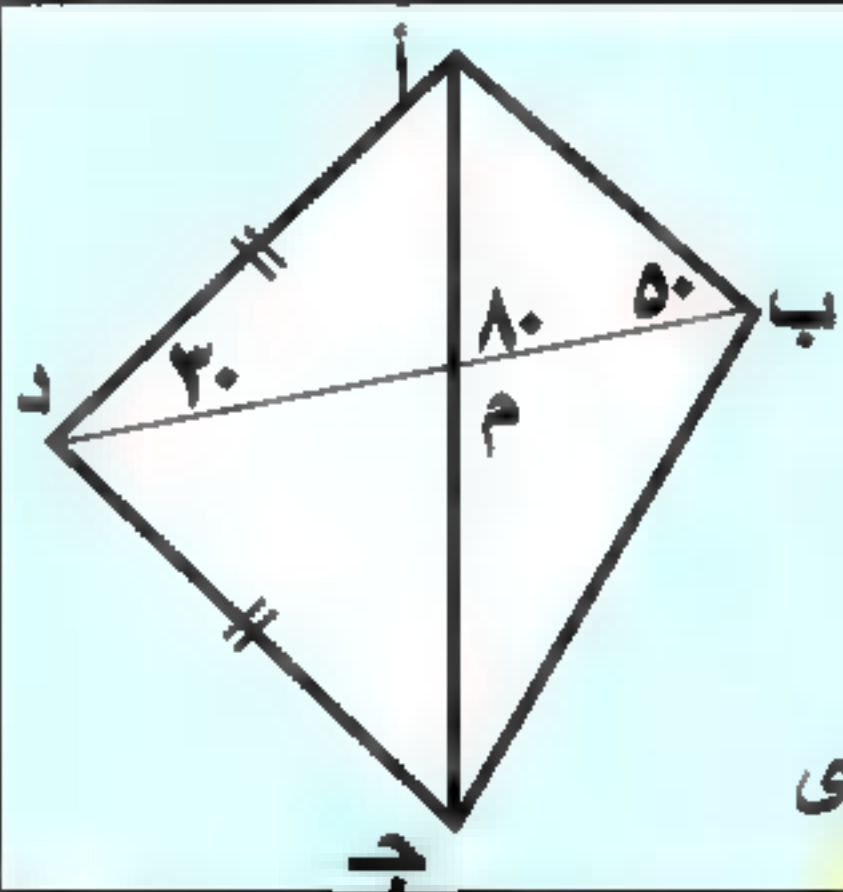
أد // ب ج

اثبت أن

الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل $\angle AHC = 76^\circ = 180^\circ - \angle BHD = 104^\circ$ في $\triangle BHE$: $\angle BHE = 180^\circ - (104^\circ + 38^\circ) = 38^\circ$ $\therefore \angle AHC = \angle BHE$ $\therefore \angle AHC = \angle BHE$ بالتبادل $\therefore \angle AHC = \angle BHE$

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة د ج

 \therefore الشكل أ ب ج د رباعي دائري

أ ب ج د شكل رباعي

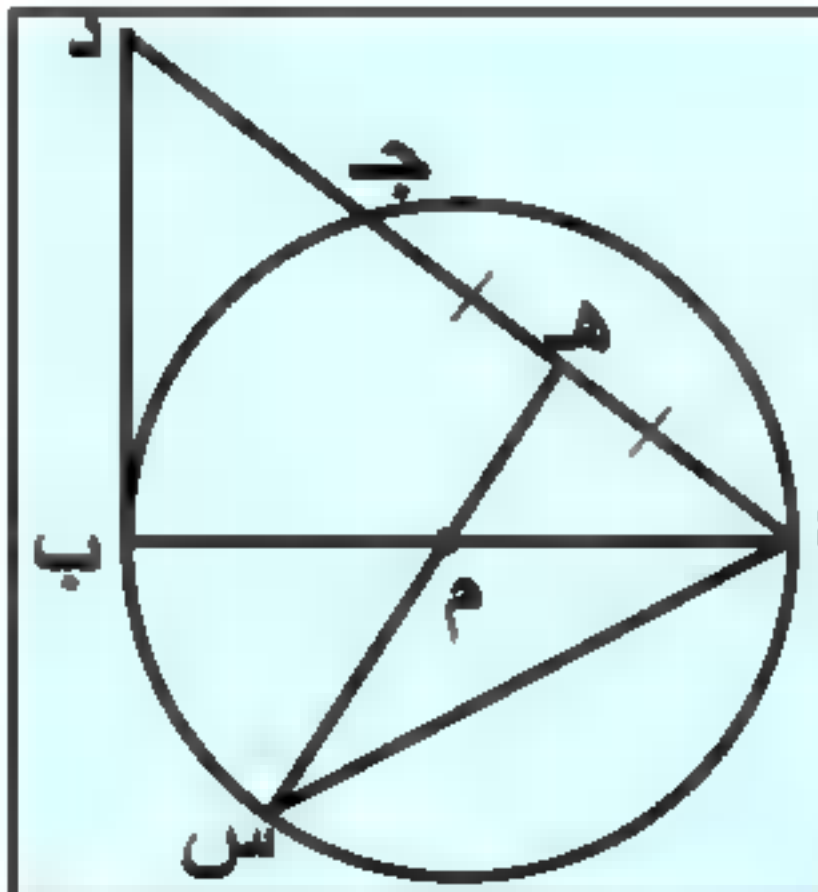
أد = د ج

اثبت أن:

الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل $\angle AMC = 80^\circ = 180^\circ - \angle BMD = 100^\circ$ زاوية مستقيمة $\therefore \angle AMC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ في $\triangle AMB$: $\angle BMD = 50^\circ = 180^\circ - (100^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$ $\therefore \angle AMC = \angle BMD$ $\therefore \angle AMC = \angle BMD$ $\therefore \angle AMC = \angle BMD$

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة أد

 \therefore الشكل أ ب ج د رباعي دائري

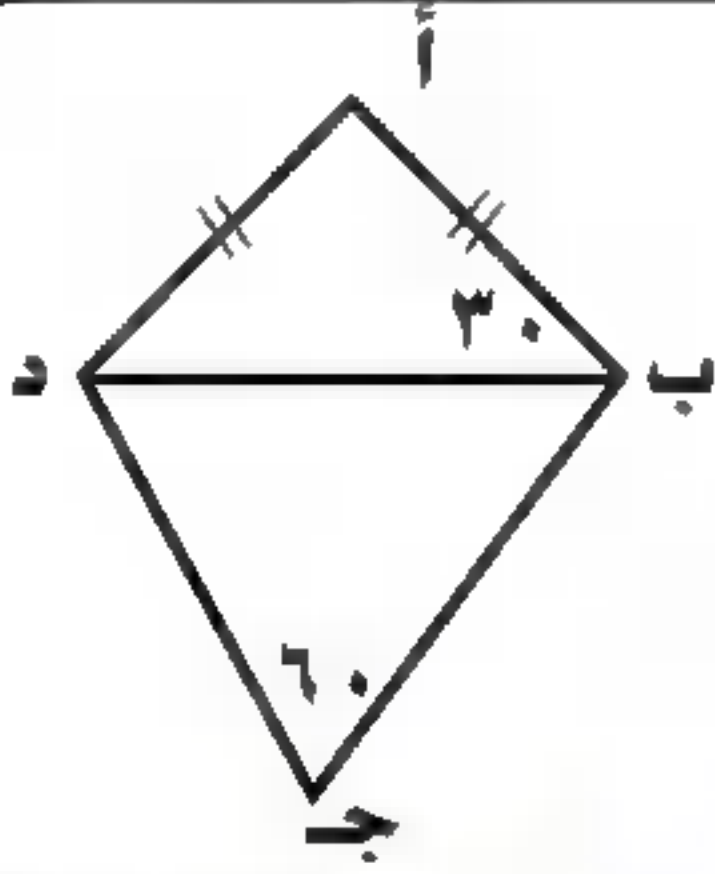
أ ب قطر في الدائرة م

هـ منتصف أج، د ب مماس

اثبت أن:

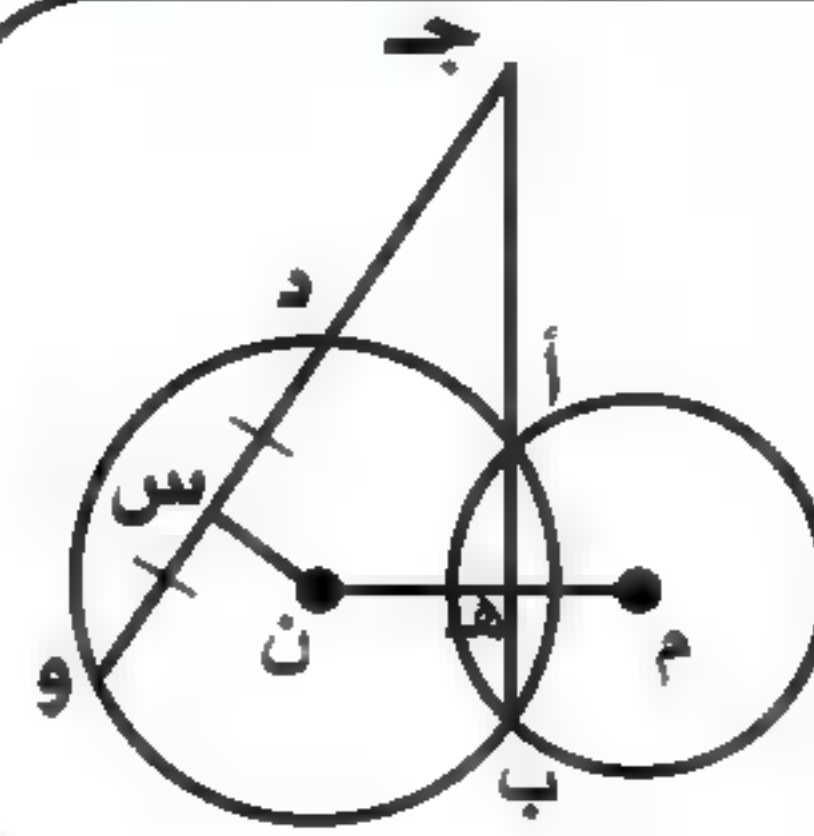
(١) م ب د هـ رباعي دائري

(٢) $\angle AHC = \angle BHE$ **الحل** $\therefore \angle AHC = \angle BHE$ $\therefore \angle AHC = \angle BHE$ $\therefore \angle AHC = \angle BHE$ $\therefore \angle AHC = \angle BHE$ من ١، ٢ ينتج أن: $\angle AHC = \angle BHE$ \therefore الشكل م ب د هـ رباعي دائري $\therefore \angle AHC = \angle BHE$ $\therefore \angle AHC = \angle BHE$ من ١، ٢، ٣: $\therefore \angle AHC = \angle BHE$



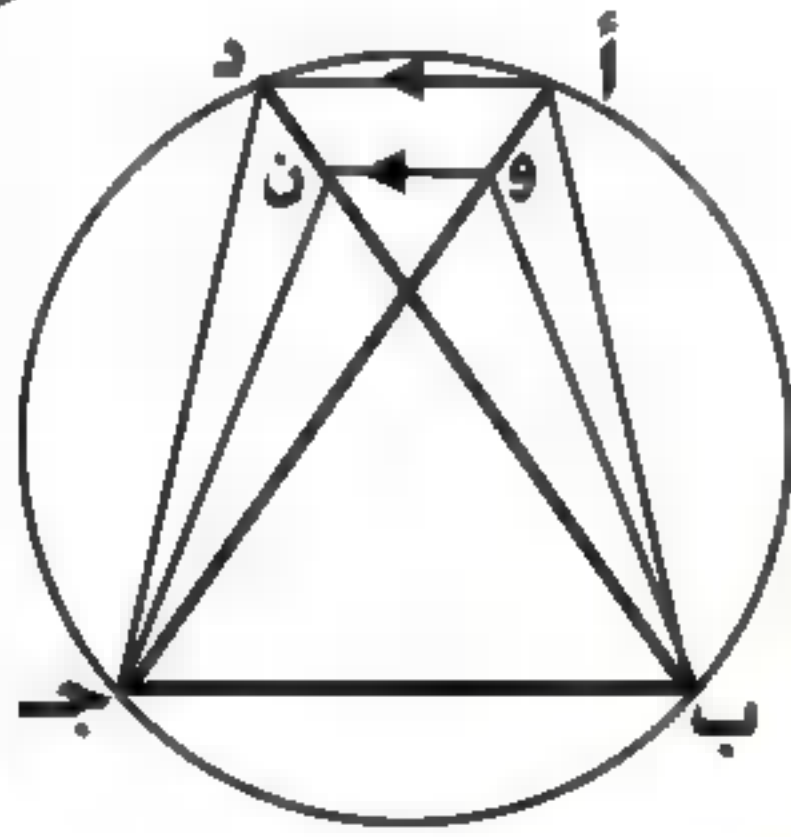
٢
أب = أد
ق (أ ب د) = ٣٠°
ق (ج د) = ٦٠°
اثبت أن : الشكل
أ ب ج د رباعي دائري

الحل



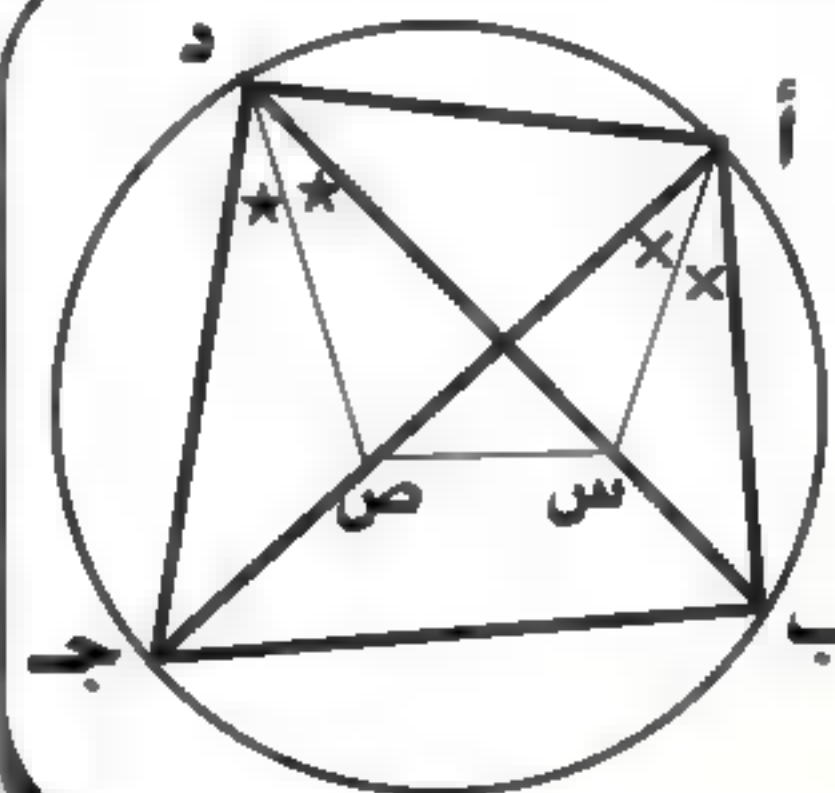
١
م ، دائرتان متقاطعتان
س منتصف د و
اثبت أن : الشكل
ج د ه ن س رباعي دائري

الحل



٤
أد // ون
اثبت أن :
(١) ب و ن ج رباعي دائري
(٢) ق (و ب ن) = ق (و ج ن)

الحل



٣
أس ينصف د ب أ ج
د ص ينصف د ب د ج
اثبت أن : الشكل
(١) أس ص د رباعي دائري
(٢) س ص // ب ج

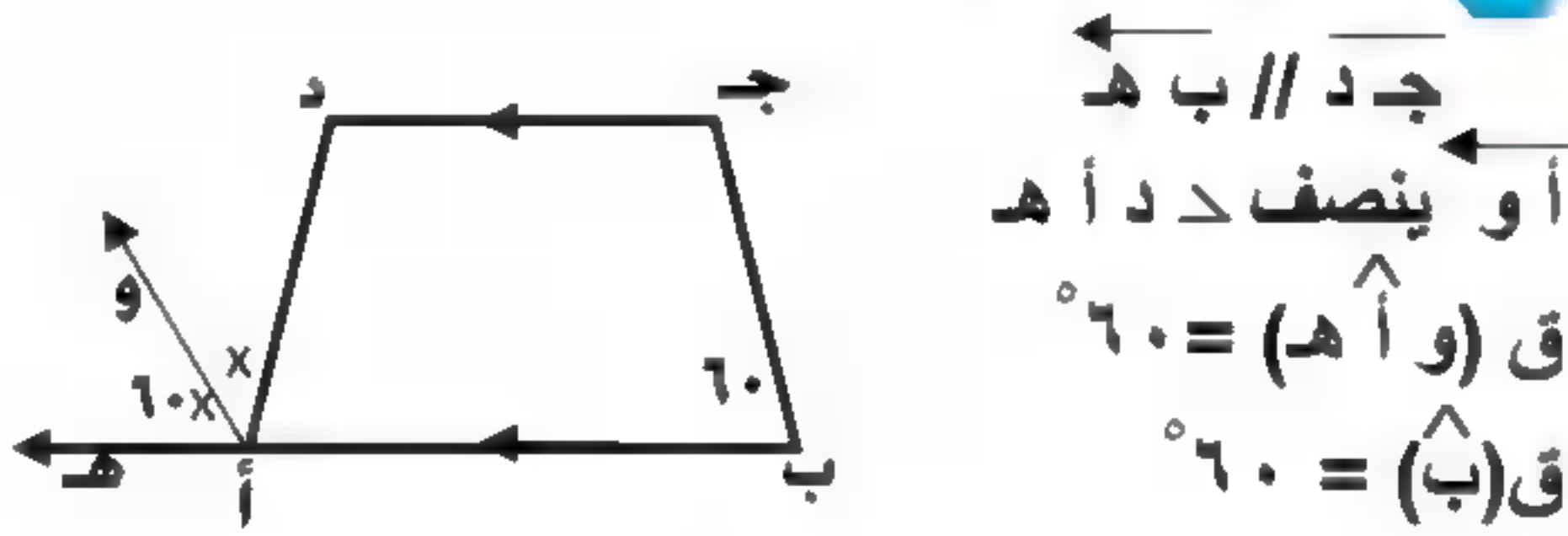
الحل

تمارين

١ اذكر حالتين يكون فيهما الشكل الرباعي دائريا

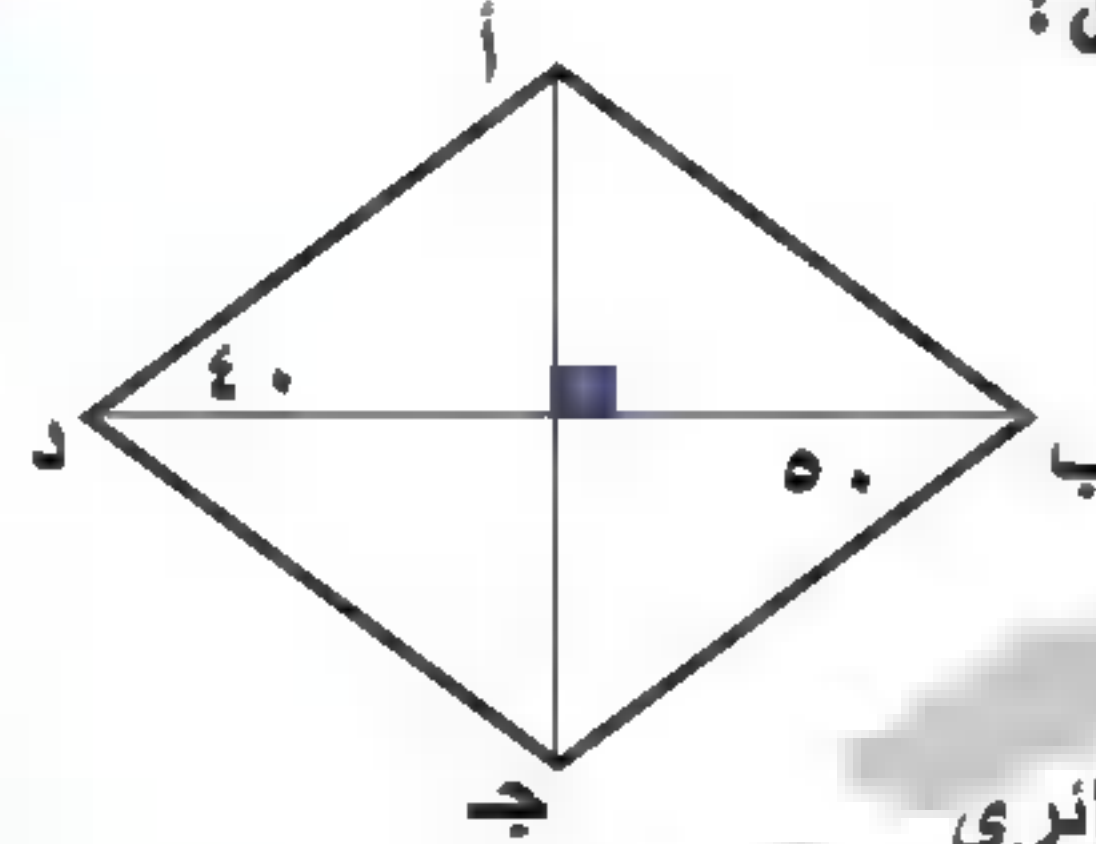
٦ أ ب ج د Δ مرسوم داخل دائرة ، $\overline{AB} \cap \overline{CD} = S$ ،
 $\overline{AC} \cap \overline{BD} = Q$ (أ س) = ق (أ ص)
 $\overline{AD} \cap \overline{BC} = R$ ، $\overline{AB} \cap \overline{CD} = H$ ،
 اثبت أن : (١) الشكل ب ج د هـ رباعي دائري
 (٢) ق (د هـ ب) = ق (س أ ب)

٧ في الشكل المقابل :



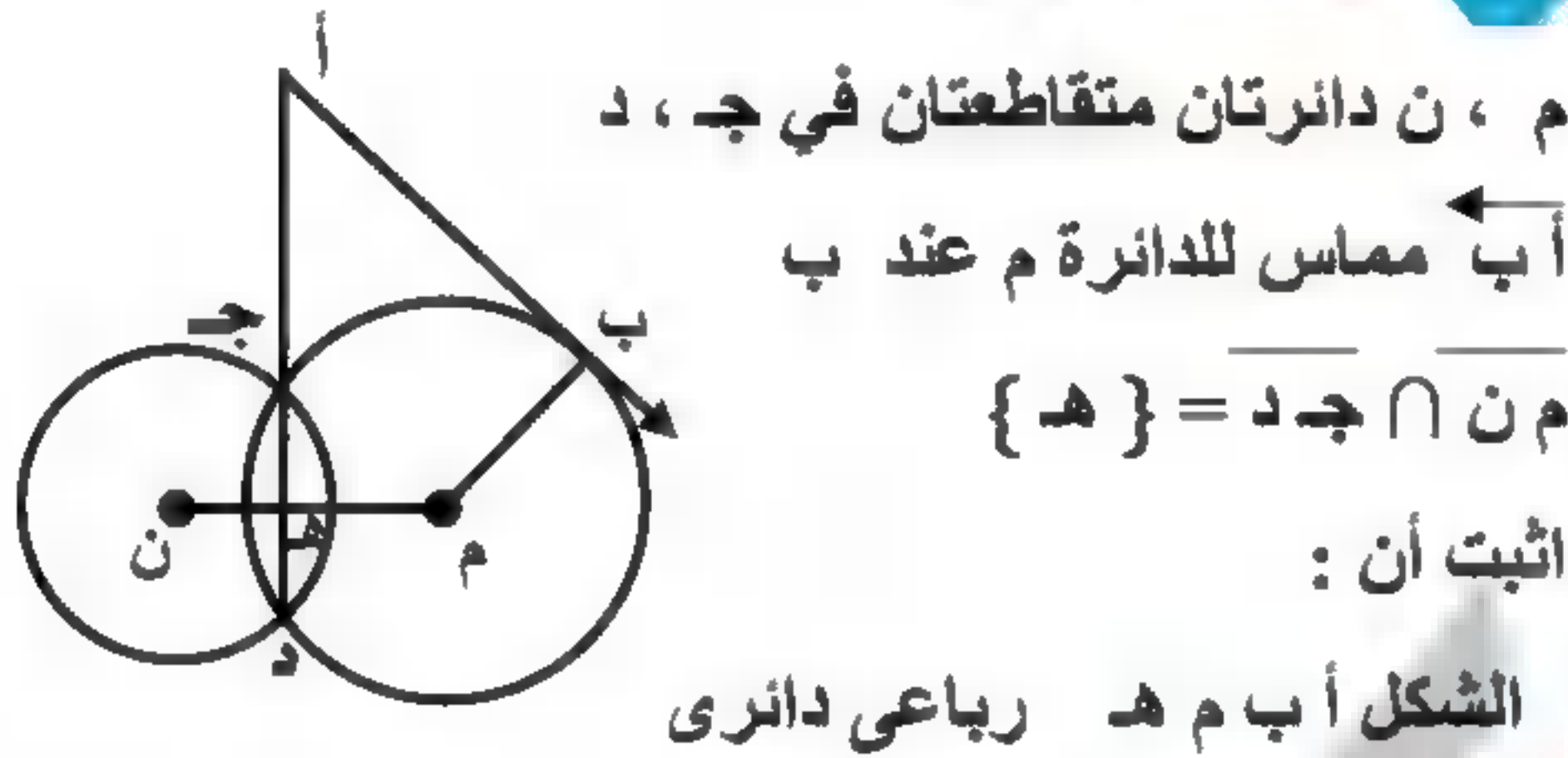
اثبت أن : الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٢ في الشكل المقابل :



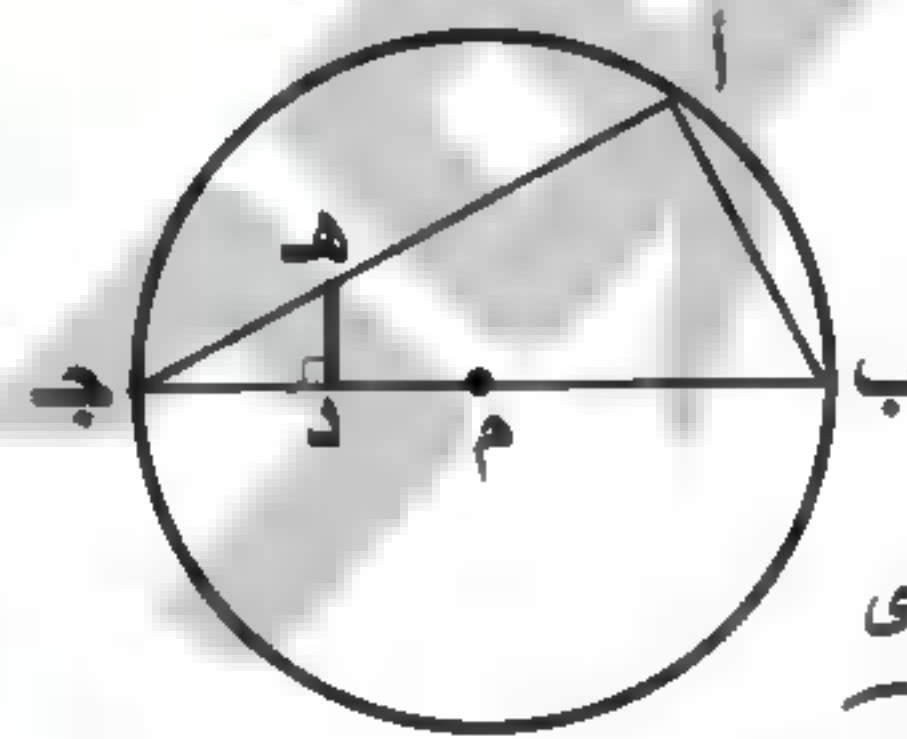
أ ب ج د شكل رباعي
 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
 بؤهن أن :
 الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٨ في الشكل المقابل :



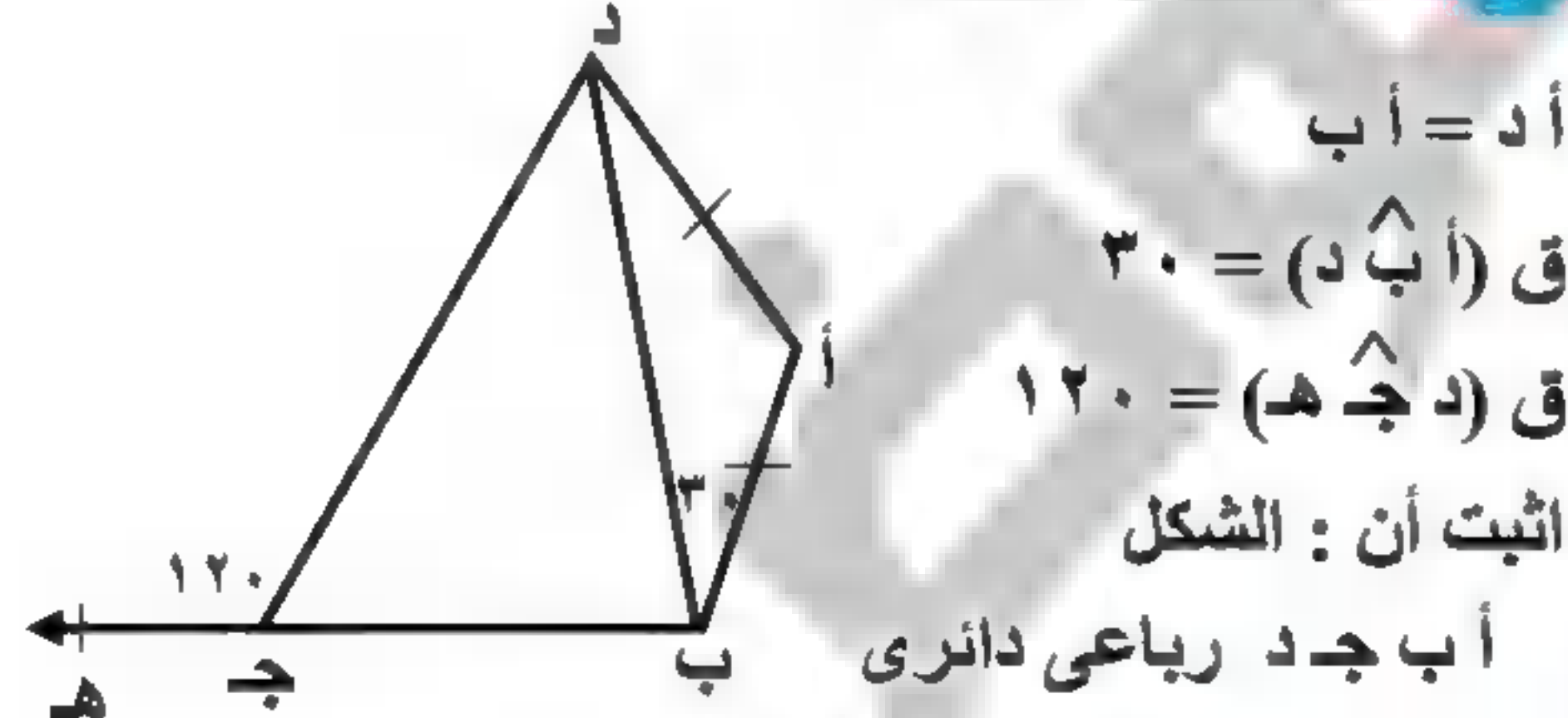
الشكل أ ب م هـ رباعي دائري

٣ في الشكل المقابل :



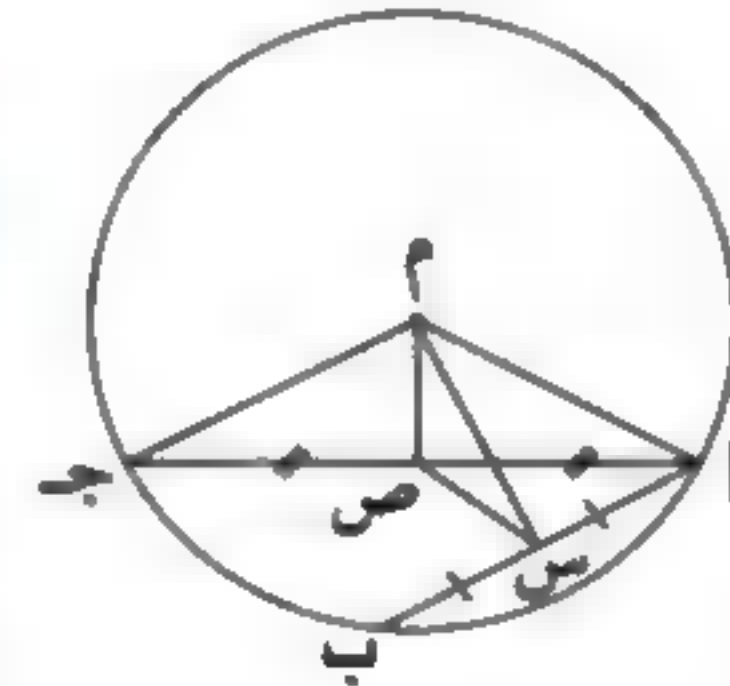
(١) الشكل أ ب د هـ رباعي دائري
 (٢) ق (د هـ ج) = $\frac{1}{4}$ ق (أ ج)

٩ في الشكل المقابل :



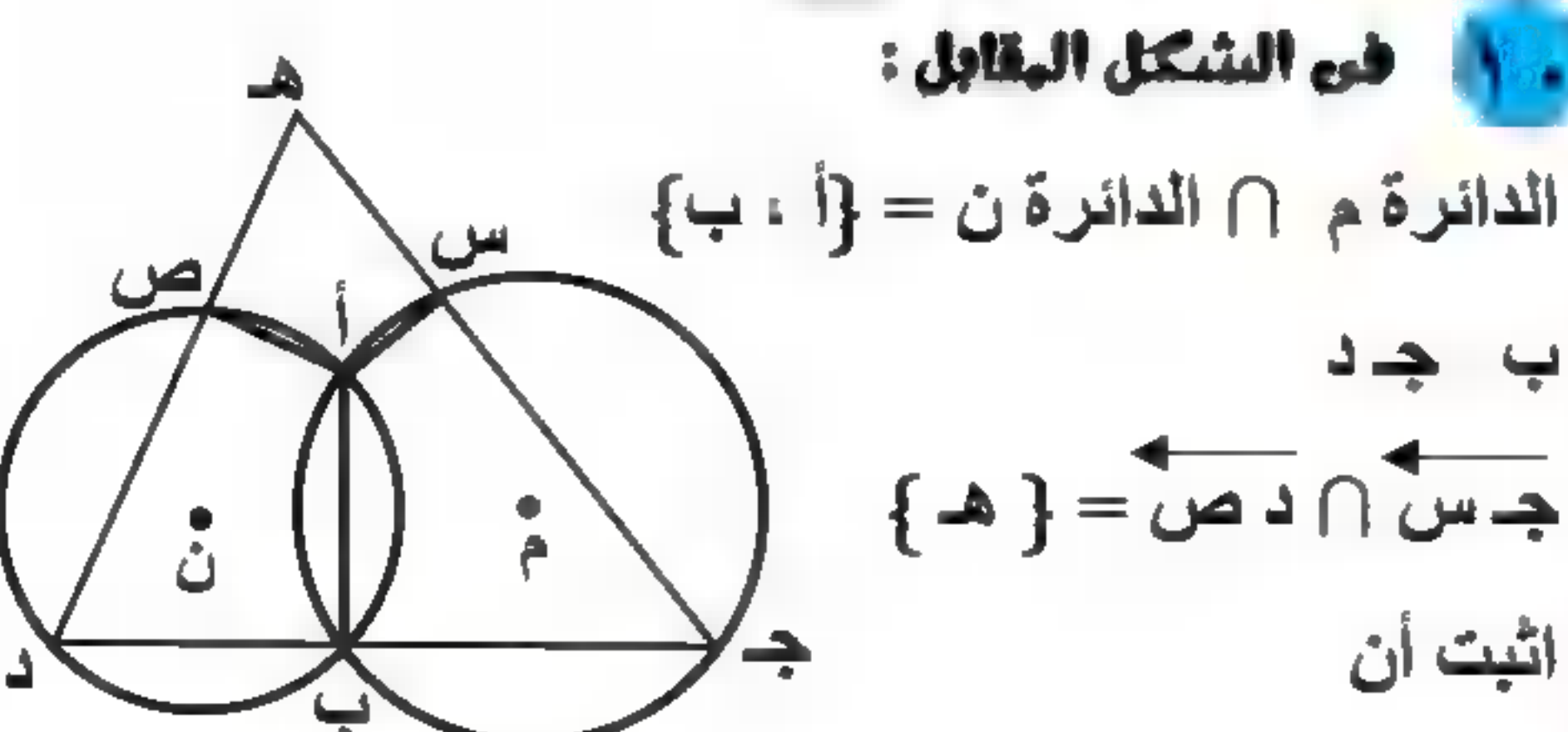
أ ب ج د رباعي دائري

٤ في الشكل المقابل :



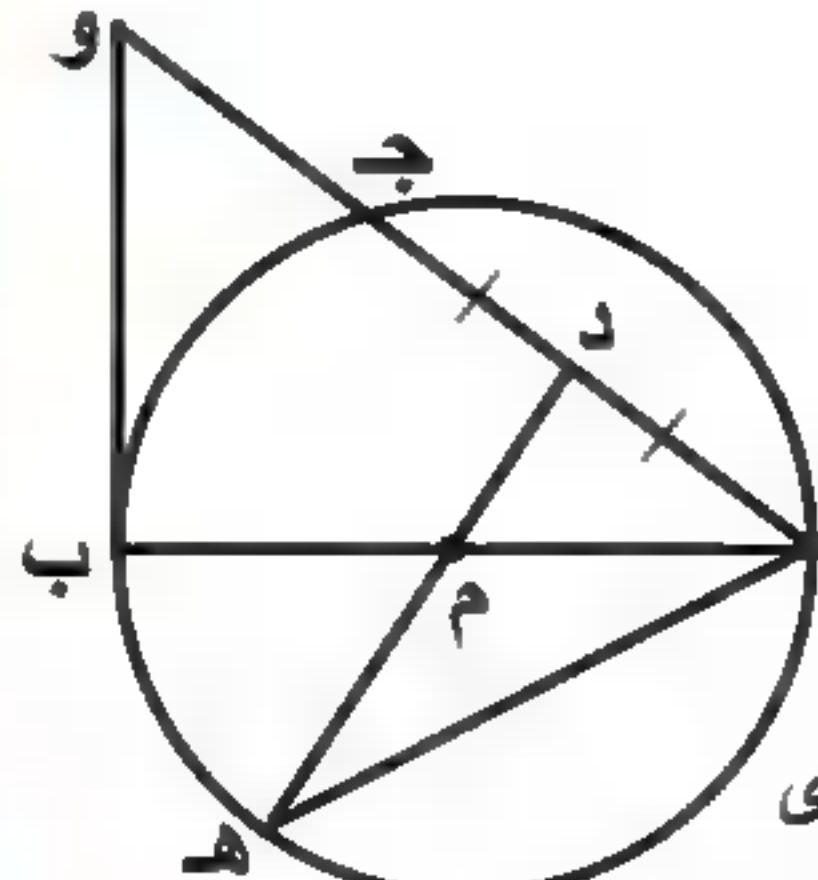
س ، ص منتصفا أ ب ، أ ج
 على الترتيب
 اثبت أن :
 أ س ص م رباعي دائري

١٠ في الشكل المقابل :



الشكل أ س هـ ص رباعي دائري

٥ في الشكل المقابل :

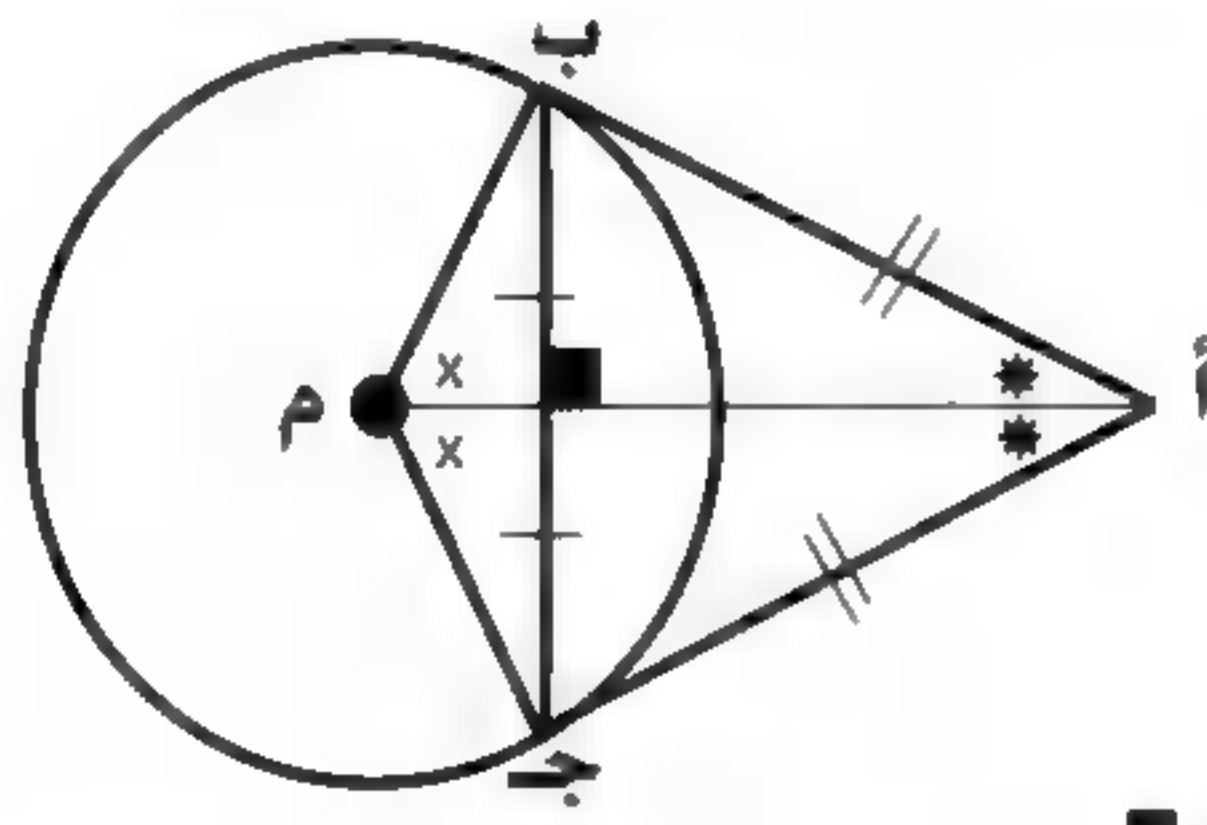
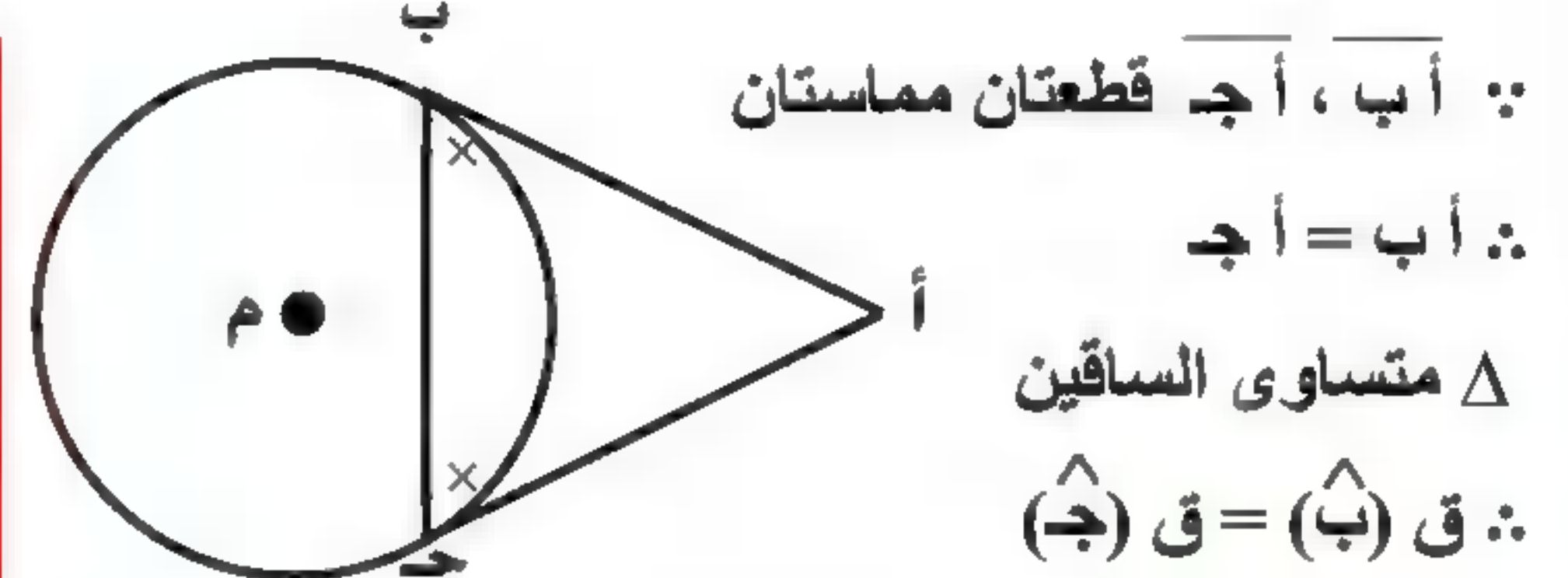
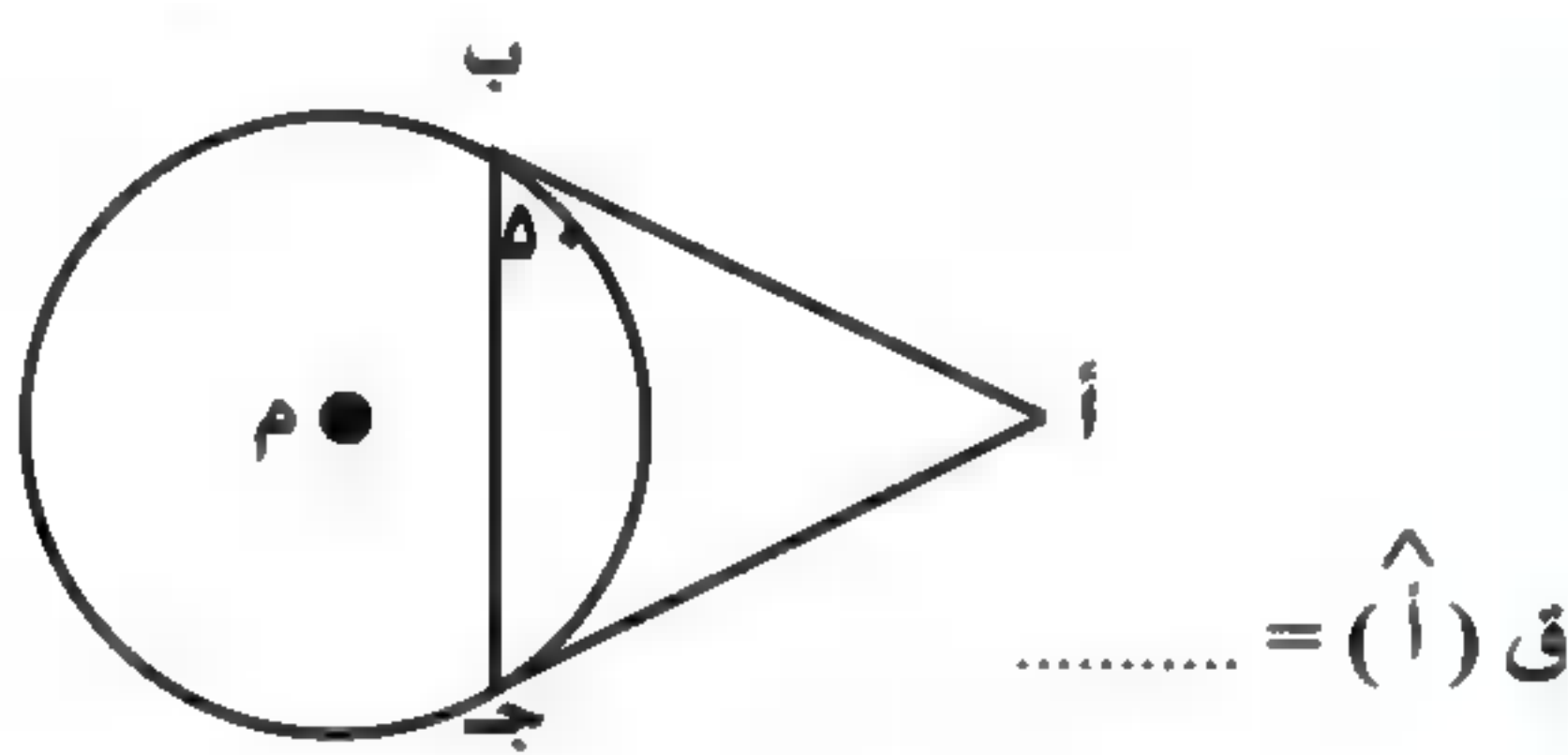


اثبت أن : (١) م ب و د رباعي دائري
 (٢) ق (و) = ٢ ق (هـ)

العلاقة بين مماسات الدائرة

الدرس
السابع 7

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان في الطول.

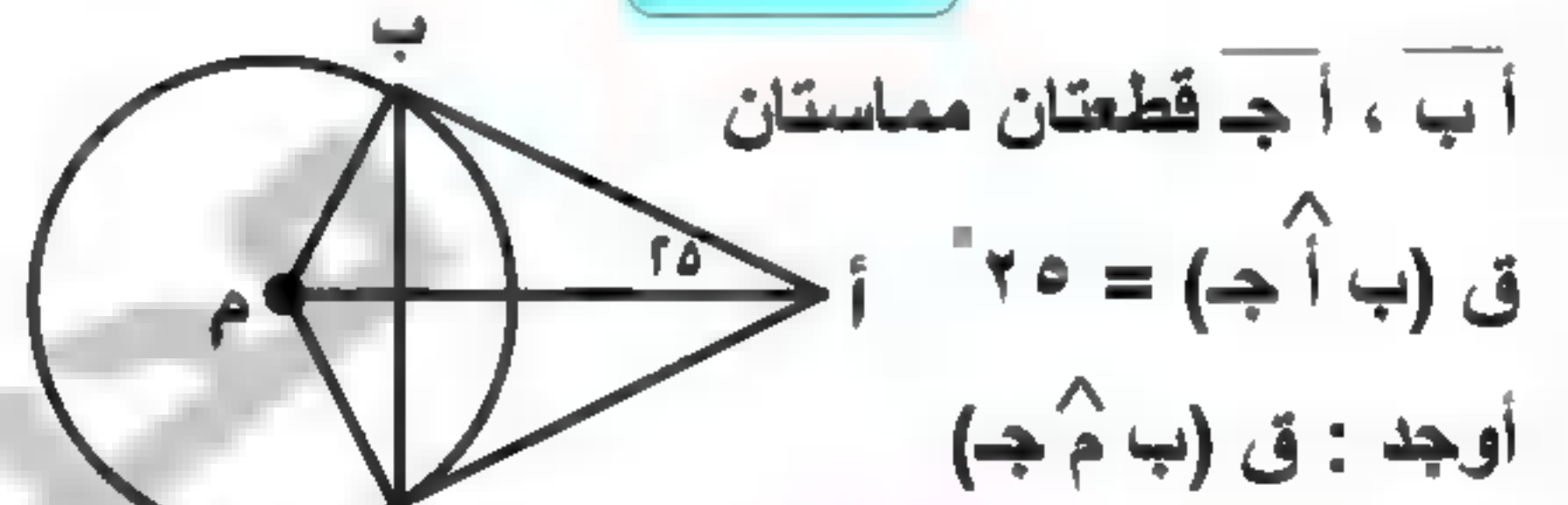


♦ م أ ينصف زاوية أ
♦ م أ ينصف زاوية م
♦ م أ ينصف الوتر ب ج
♦ م أ عمودي على الوتر ب ج
الخلاصة : م أ ينصف زاويتي و

محمود عوض

تصميم
معلم رياضيات
محمود عوض

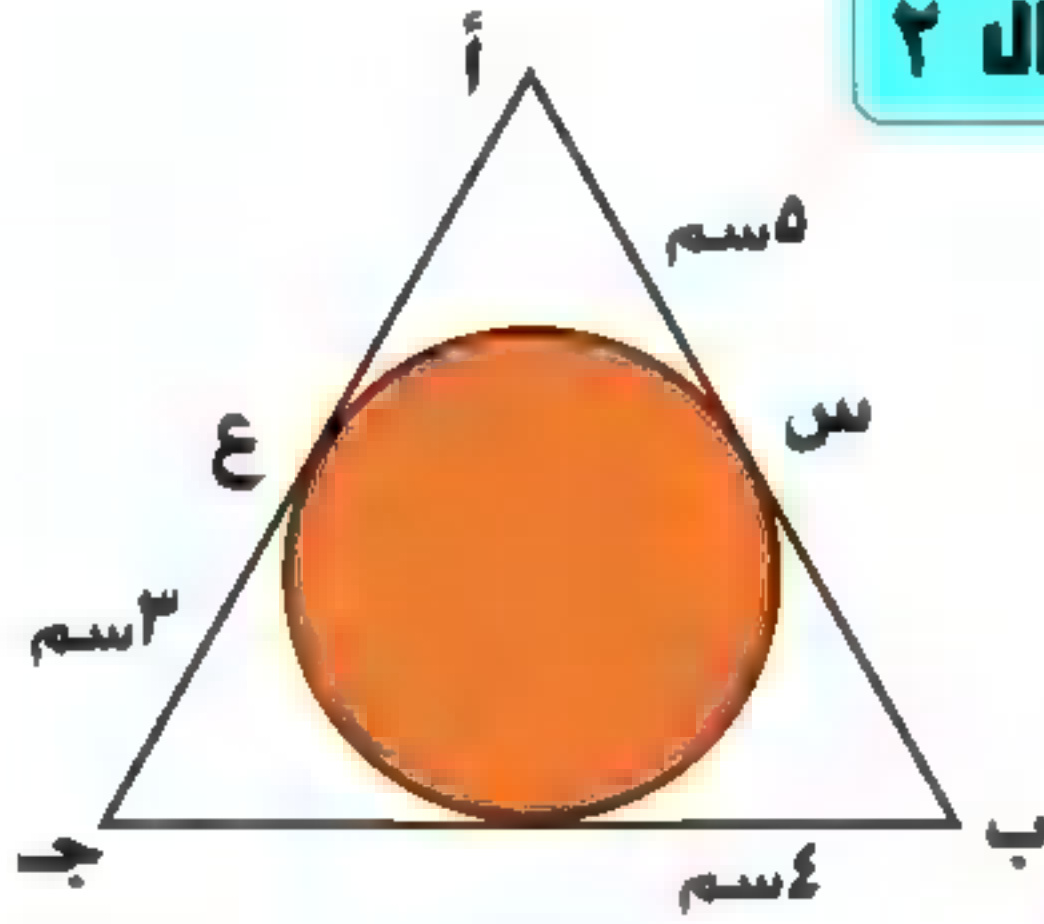
مثال ١



الحل

∴ أ ب مماسة ، ب م نصف قطر ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°
في Δ أ ب م :
ق (أ م ب) = ١٨٠ - (٩٠ + ٣٥) = ٥٥°
∴ م أ ينصف ∠ ب م ج
∴ ق (ب م ج) = ٢ × ٥٥ = ١١٠°

مثال ٢



الحل

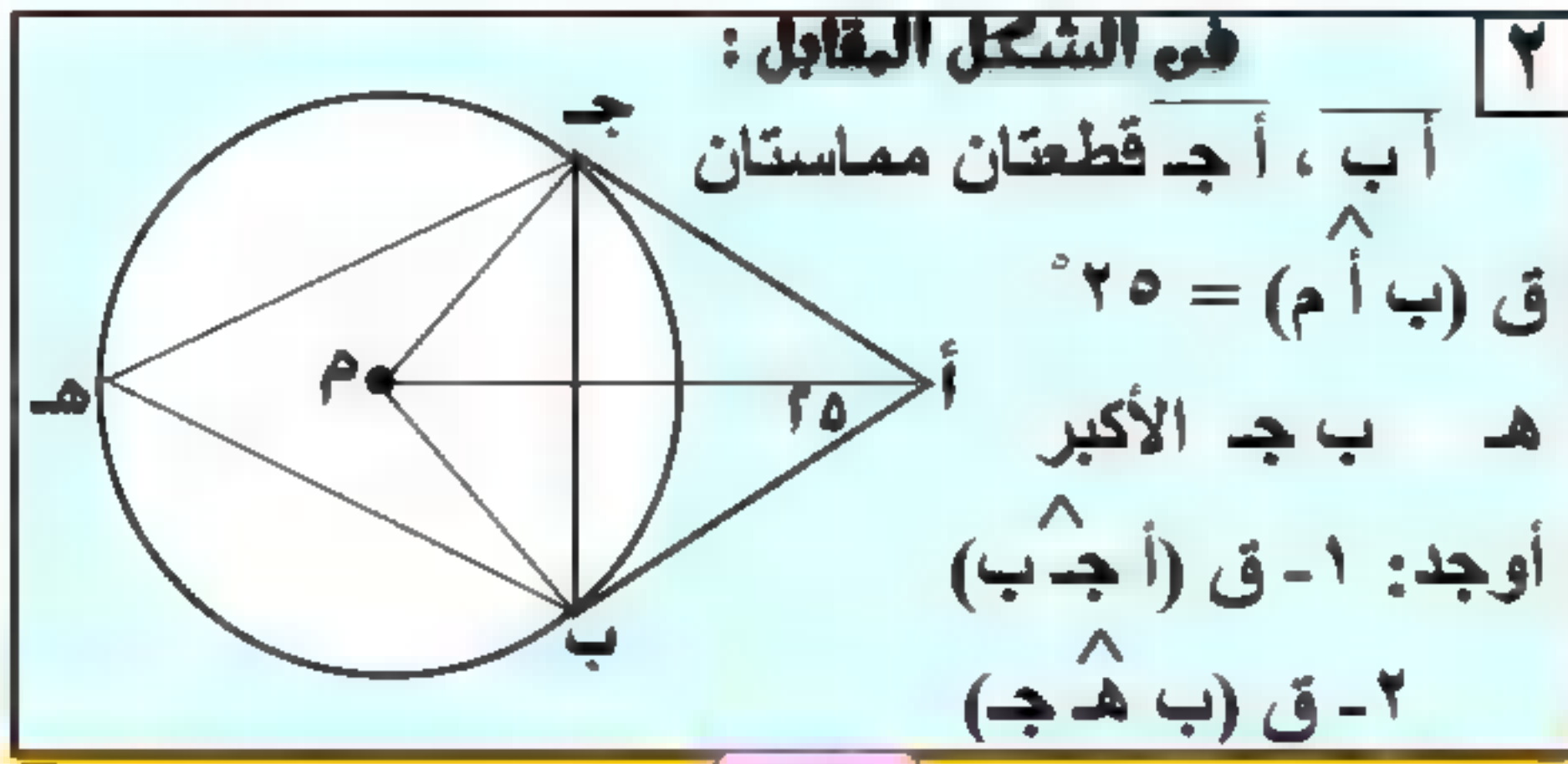
Δ أ ب ج يمس الدائرة
من الخارج في س ، ص ، ع
أ س = ٥ سم ، ب ص = ٤ سم
ج ع = ٣ سم
أوجد محيط Δ أ ب ج

أ س = أ ع = ٥ سم
ب ص = ب ف = ٤ سم
ج ع = ج ف = ٣ سم

أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، ب ج = ٤ + ٣ = ٧ سم
أ ج = ٣ + ٥ = ٨ سم المحيط = ٩ + ٧ + ٨ = ٢٤ سم

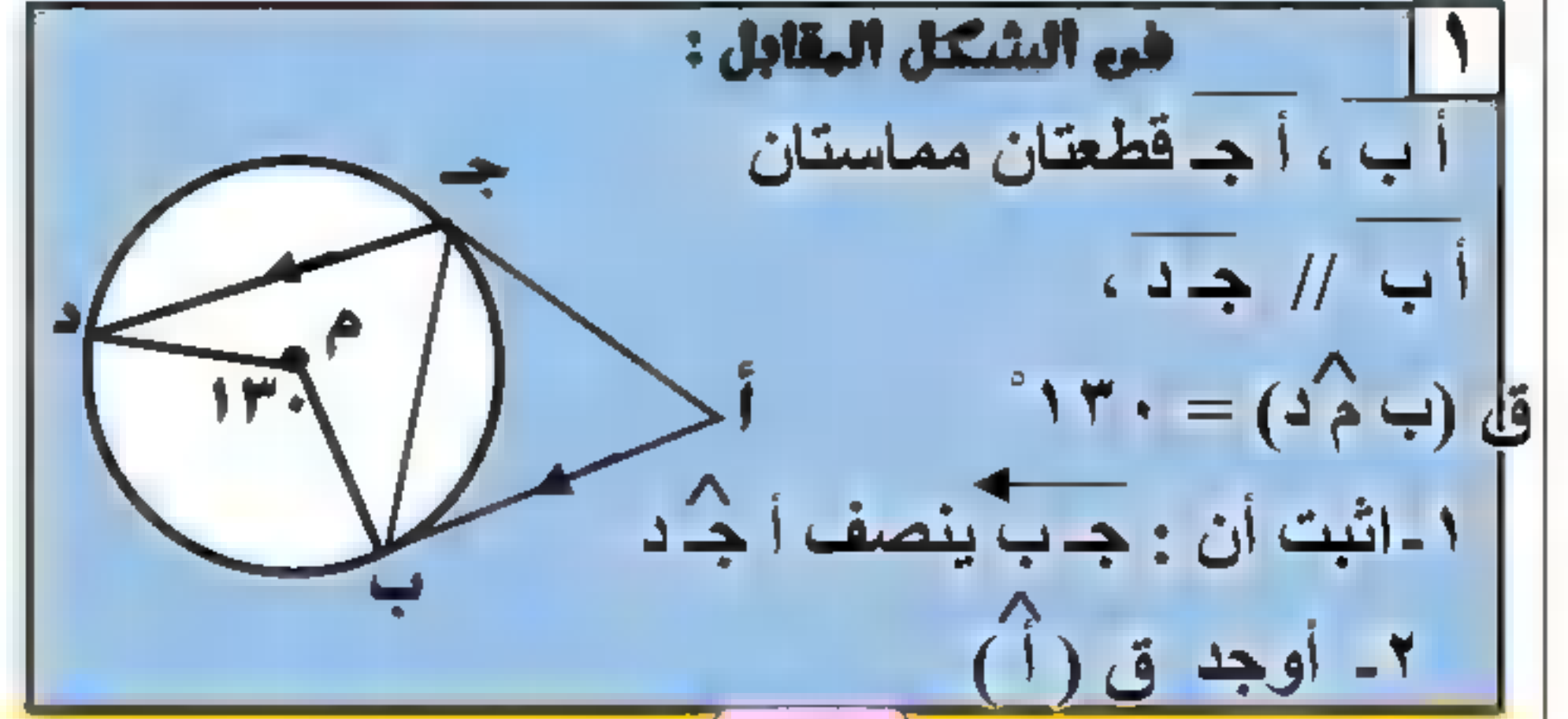
عدد المماسات المشتركة

- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ٤
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماسيتين من الخارج ٣
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين ٢
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين ٠



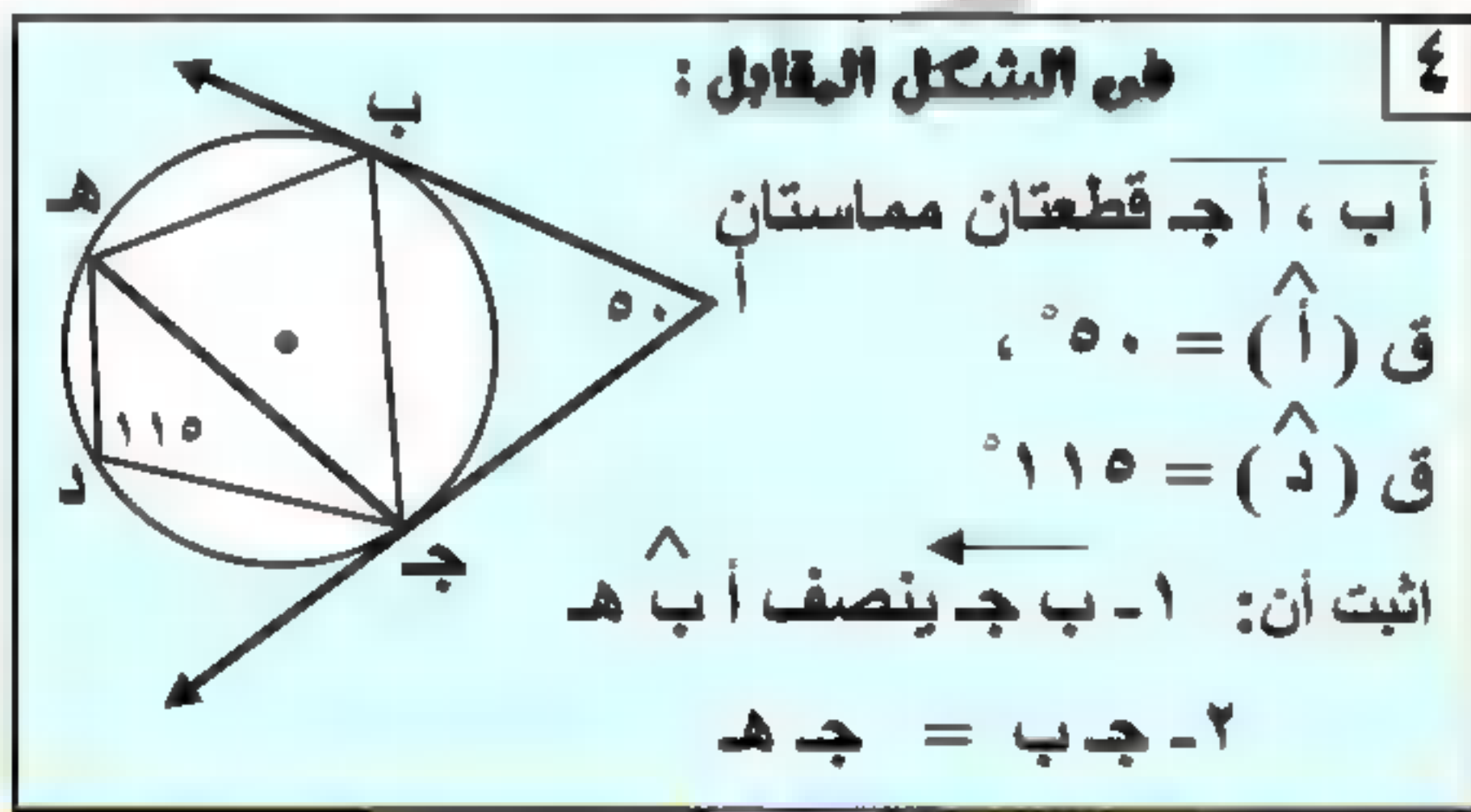
الحل

∴ أ ب ، أ ج قطعتان مماستان ∴ أ م ينصف \hat{A}
∴ ق (أ) = $2 \times 25 = 50^\circ$
في ٨ أج ب : ق (أ ج ب) = $\frac{50 - 180}{2} = 65^\circ$ **أولاً**
∴ أ ج مماسة ، م ج نصف قطر ∴ م ج \perp أ ج
∴ ق (أ ج م) = 90°
كذلك ∴ أ ب مماسة ، م ب نصف قطر ∴ م ب \perp أ ب
∴ ق (أ ب م) = 90°
في الشكل الرباعي أ ب م ج
ق (ج م ب) = $360 - (90 + 90 + 50) = 130^\circ$
∴ ق (ب هـ ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب م ج) المركزية = 65°



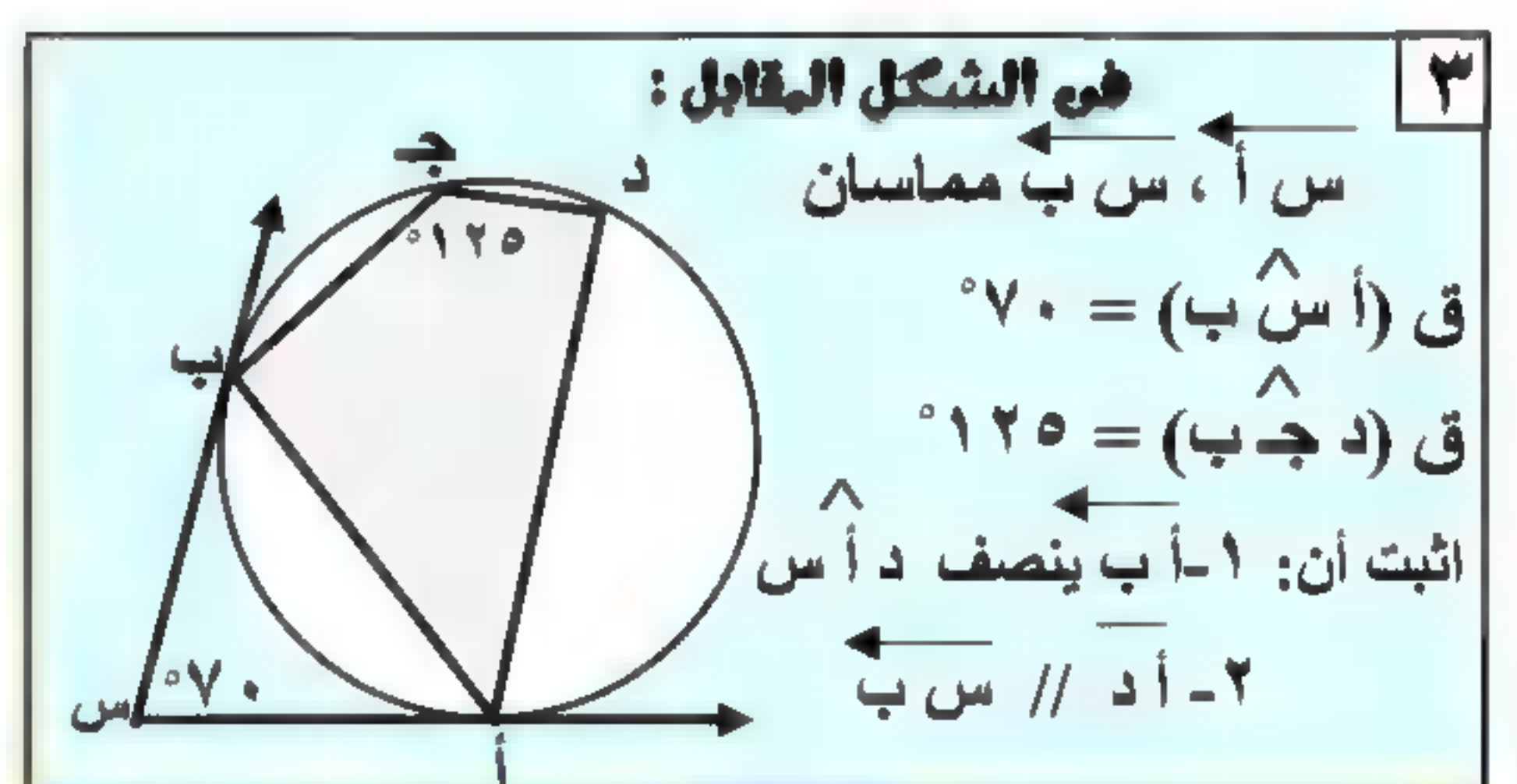
الحل

∴ ق (ب ج د) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية
∴ ق (ب ج د) = 65°
∴ أ ب // ج د
∴ ق (أ ب ج) = ق (ب ج د) = 65° بالتبادل (١)
∴ أ ب = ب ج (قطعتان مماستان)
∴ ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب) = 65° (٢)
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ب ج د) = ق (أ ج ب)
∴ ج ب ينصف أ ج د **المطلوب الأول**
ق (أ) = $180 - (65 + 65) = 50^\circ$



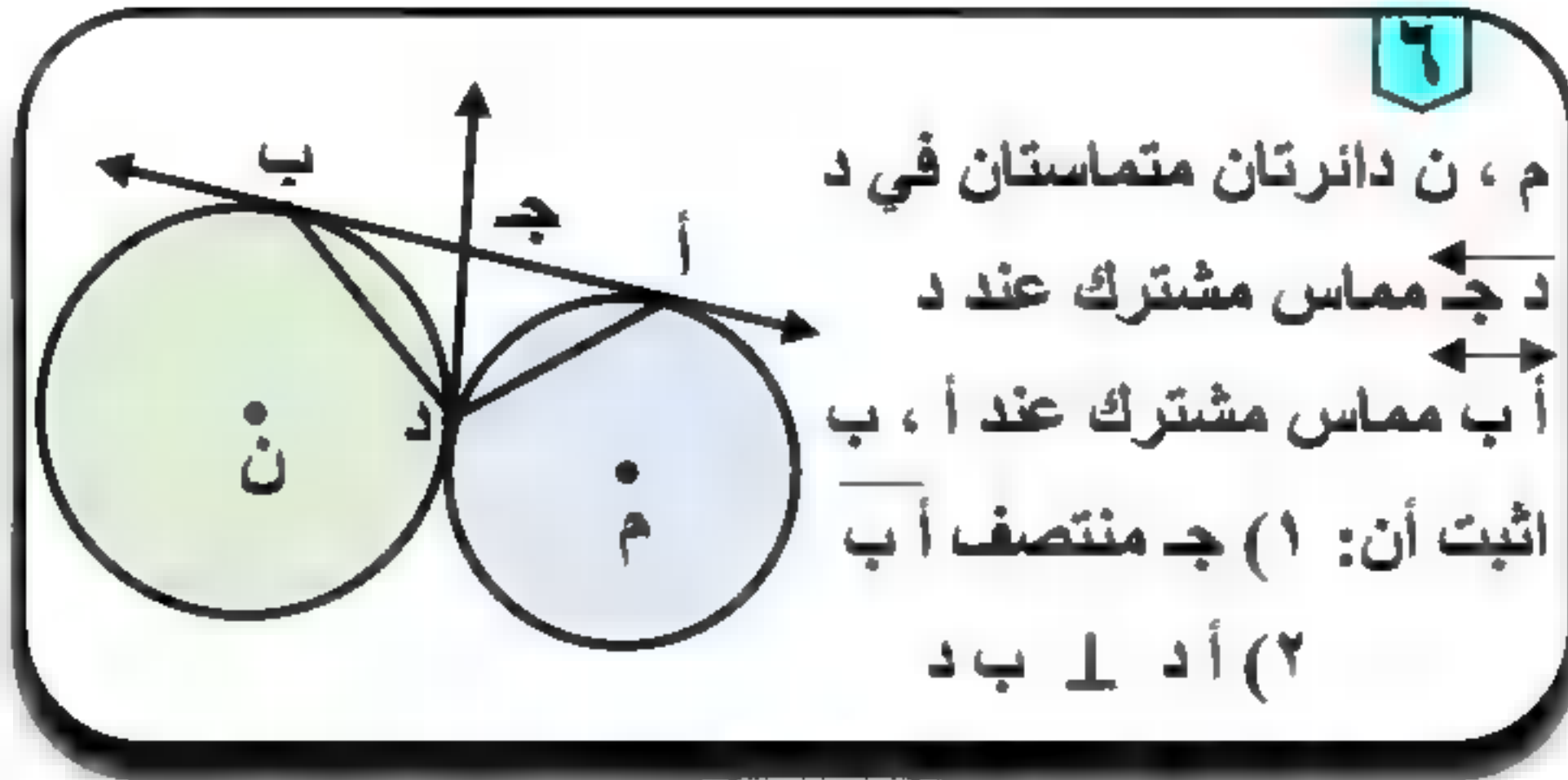
الحل

∴ أ ب = أ ج قطعتان مماستان
∴ ق (أ ب ج) = $\frac{50 - 180}{2} = 65^\circ$ (١)
∴ ب ج د هـ رباعي دائري
∴ ق (ج ب هـ) = $180 - 115 = 65^\circ$ (٢)
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (أ ب ج) = ق (ج ب هـ) (٣)
∴ ب ج ينصف أ ب هـ **المطلوب الأول**
∴ ق (أ ب ج) المماسية = ق (ج هـ ب) المحيطية (٤)
من ٣ ، ٤ ينتج أن : ق (ج ب هـ) = ق (ج هـ ب)
∴ ج ب = ج هـ **المطلوب الثاني**



الحل

∴ أ ب ج د رباعي دائري ∴ ق (ج) + ق (د أ ب) = 180°
∴ ق (د أ ب) = $180 - 125 = 55^\circ$ (١)
∴ س أ ، س ب مماستان للدائرة ∴ س أ = س ب
∴ Δ س أ ب متساوي الساقين
∴ ق (س أ ب) = $\frac{70 - 180}{2} = 55^\circ$ (٢)
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (د أ ب) = ق (س أ ب)
∴ أ ب ينصف د أ س **المطلوب الأول**
∴ ق (د أ س) = $55 + 55 = 110^\circ$
∴ ق (د أ س) + ق (س) = $180 = 70 + 110$ وهما متداخلتان
∴ أ د // س ب



الحل

في الدائرة م :: ج د ، ج أ قطعان مماستان
:: ج د = ج أ (١)

في الدائرة ن :: ج د ، ج ب قطعان مماستان
:: ج د = ج ب (٢)

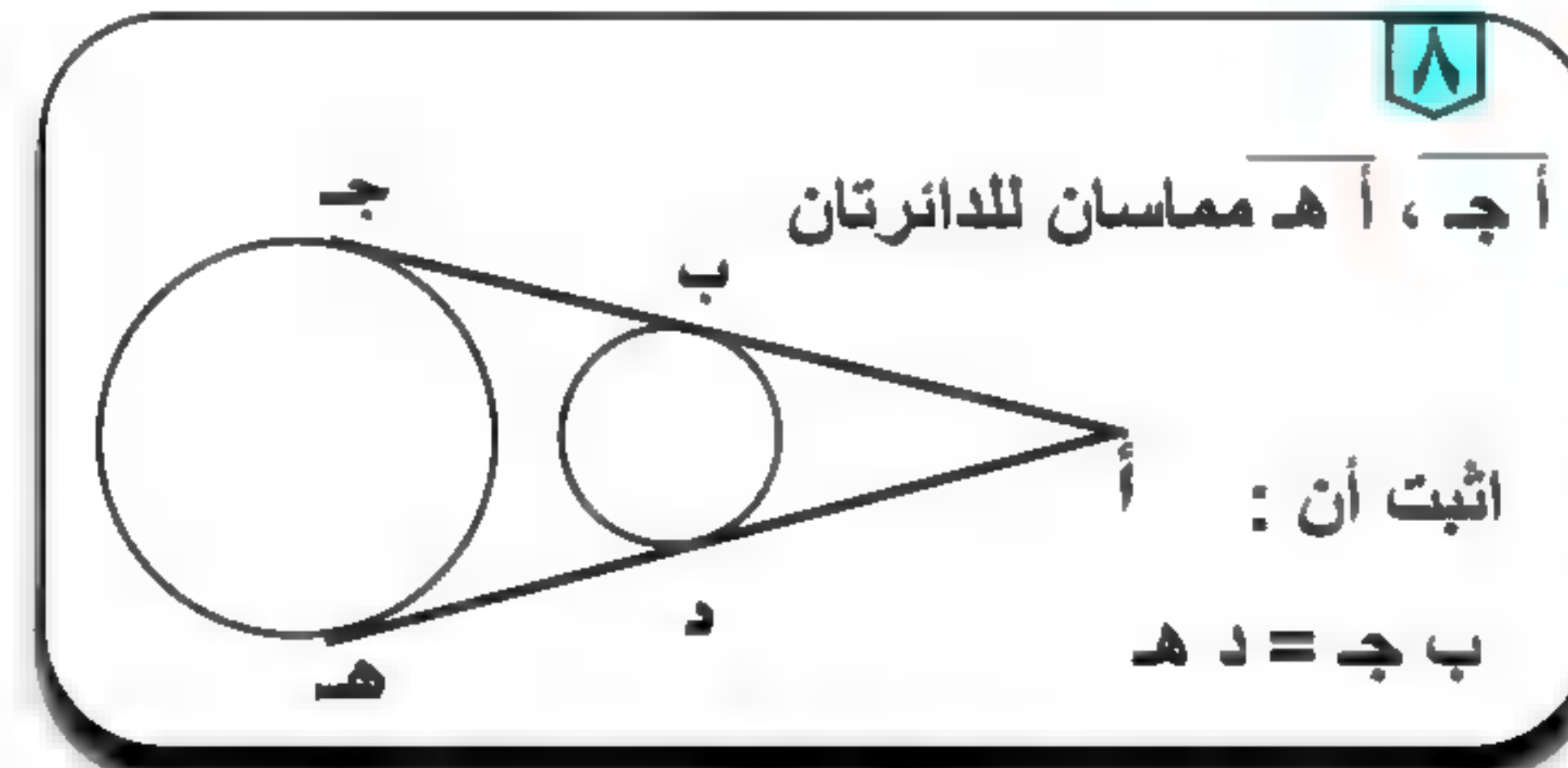
من ١ ، ٢ ينتج أن: ج أ = ج ب

:: ج منتصف أ ب المطلوب الأول

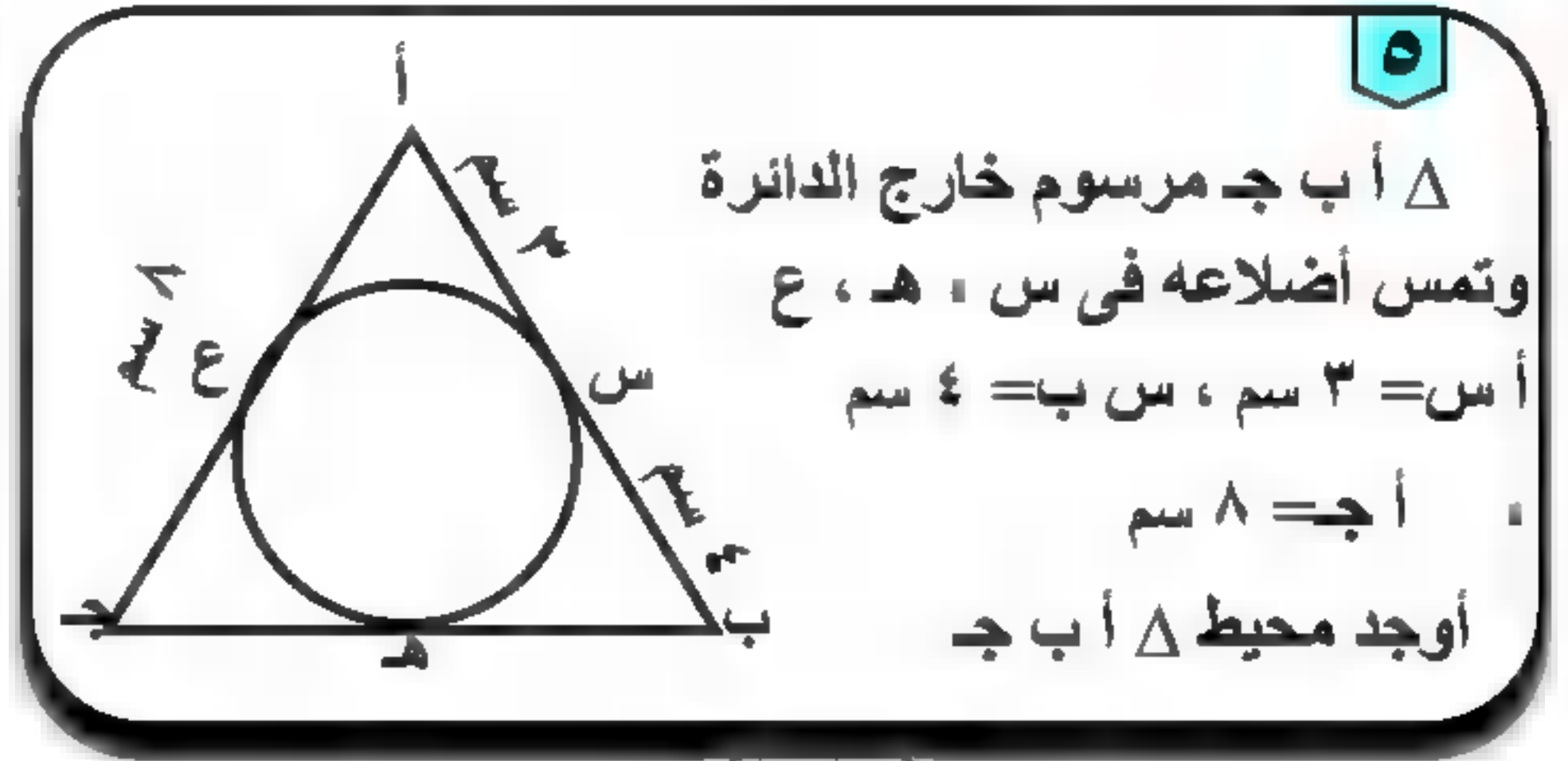
في $\triangle أ د ب$:: ج منتصف أ ب :: د ج متوسط

:: د ج = $\frac{1}{2}$ أ ب :: د ج خارج من زاوية قائمة

:: أ د \perp ب د المطلوب الثاني



الحل



الحل

:: أ س = أ ع قطعان مماستان

:: أ ع = ٣ سم

:: ع ج = ٨ - ٤ = ٤ سم

:: ج ع = ج ه قطعان مماستان

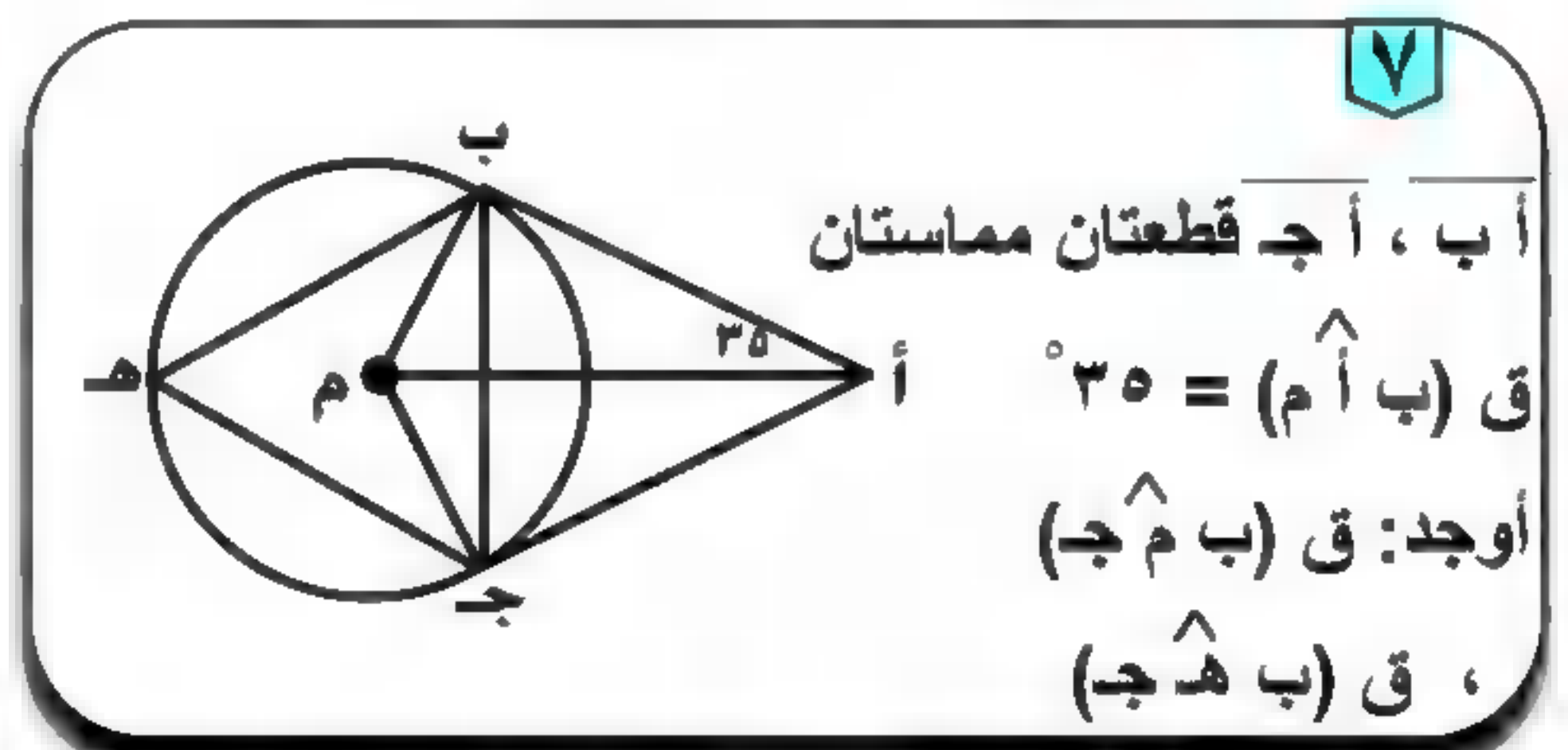
:: ج ه = ٤ سم

:: ب ه = ب س قطعان مماستان

:: ب ه = ٤ سم

:: ب ج = ٤ + ٤ = ٨ سم

:: محيط = ٧ + ٨ + ٩ = ٢٤ سم



الحل

تمارين

٥ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج =

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٦ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتان هو

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

٣ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل =

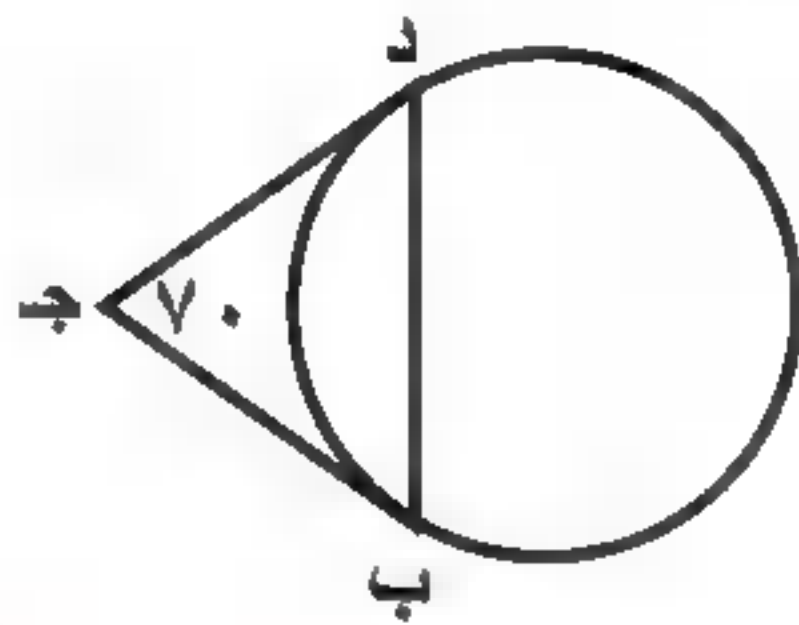
- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٤ المماسان المرسومان من نهايتي قطر في دائرة يكونان

- (أ) متوازيان (ب) منطبقان (ج) متقاطعان (د) متساويان في الطول

٥ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة يكونان

- (أ) متوازيتان (ب) متعامدتان (ج) متطابقتان (د) منطبقتان



٦ في الشكل المقابل : ج ب ، ج د قطعان مماستان

ق (ج) = ٧٠° فإن ق (د ب) الأصغر =°

- (أ) ٧٠ (ب) ١١٠ (ج) ١٢٥ (د) ٥٥

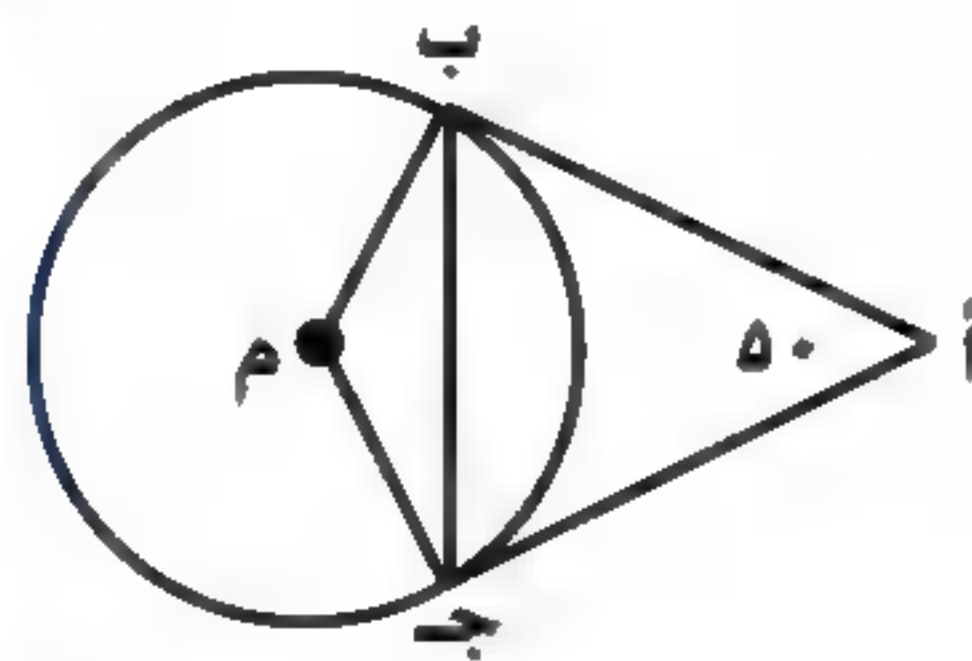
١ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج قطعان مماستان

ق (ب أ ج) = ٥٠°

أوجد : (١) ق (أ ب ج)

(٢) ق (م)



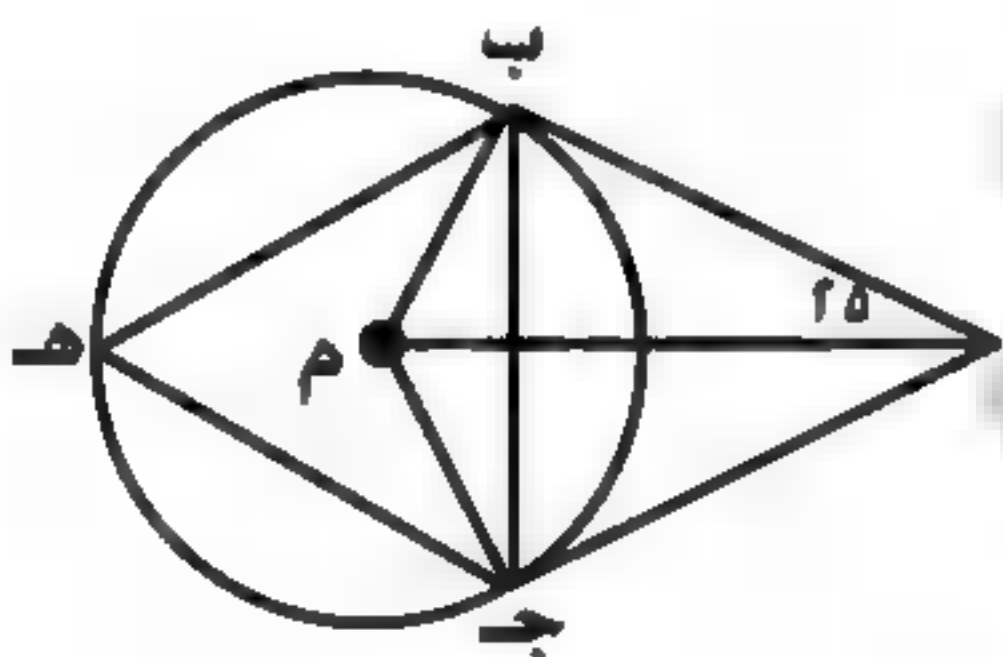
٣ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج قطعان مماستان

ق (ب أ م) = ٢٥°

أوجد : (١) ق (أ ب ج)

(٢) ق (ب هـ ج)



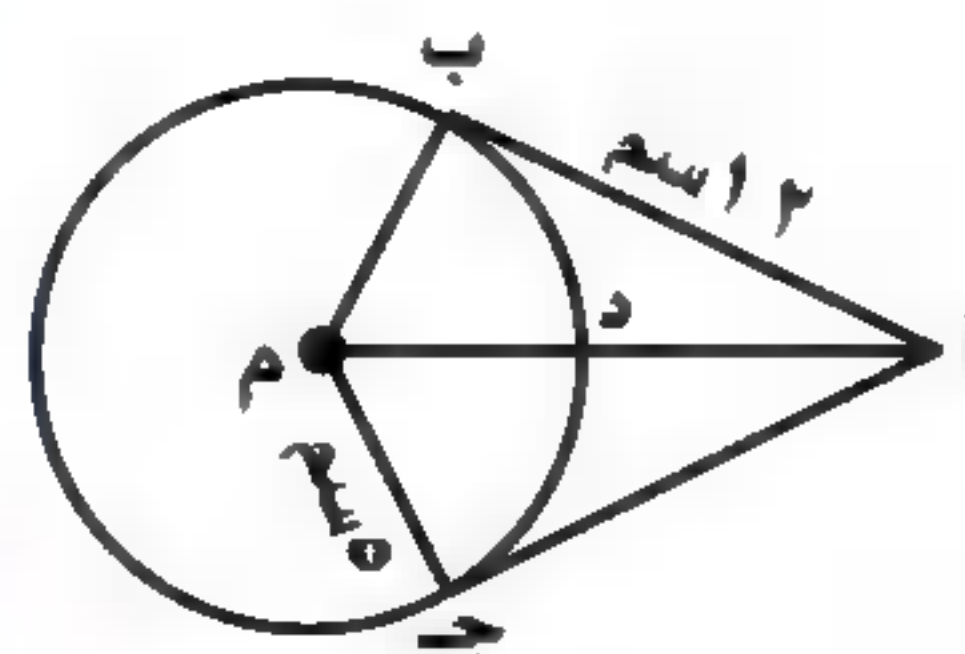
٢ في الشكل المقابل:

أ ج ، أ ب مماستان

أ ب = ١٢ سم

ج م = ٥ سم

أوجد طول: أ ج ، أ د



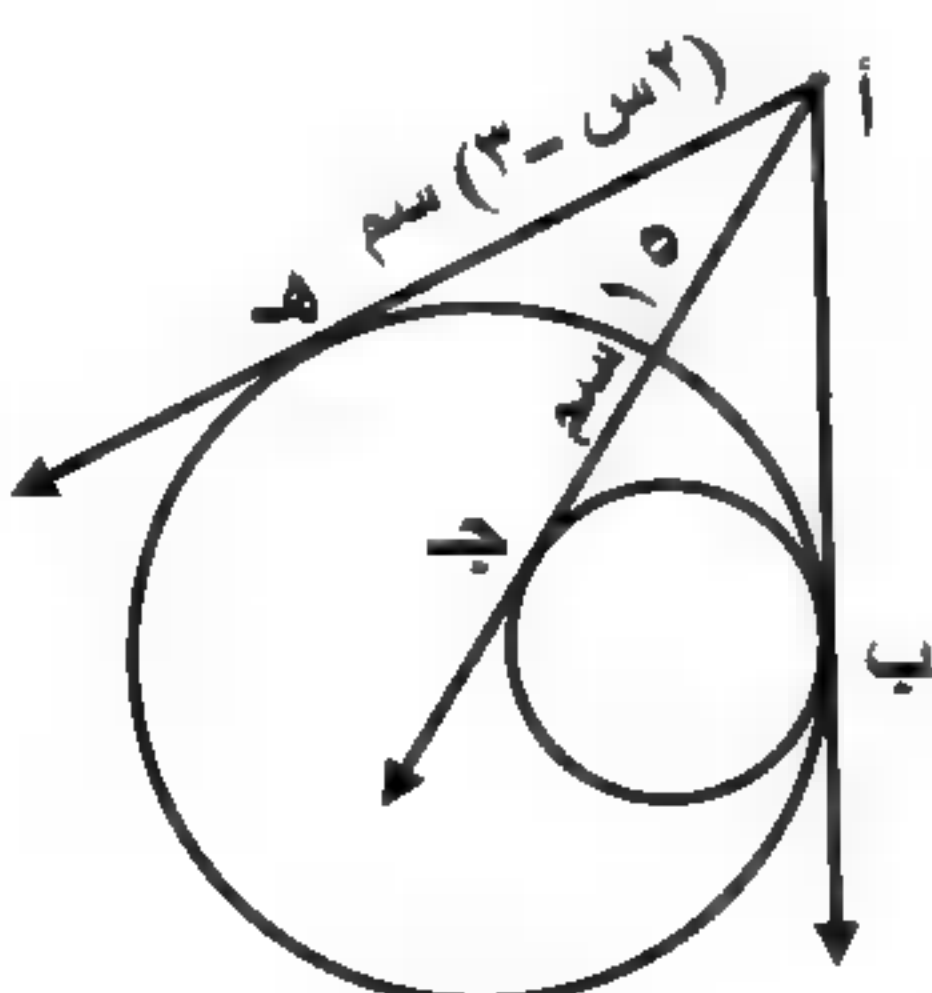
٤ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج ، أ هـ مماسات

أ ج = ١٥ سم

أ هـ = (٣ - ٢) سم

أوجد قيمة س

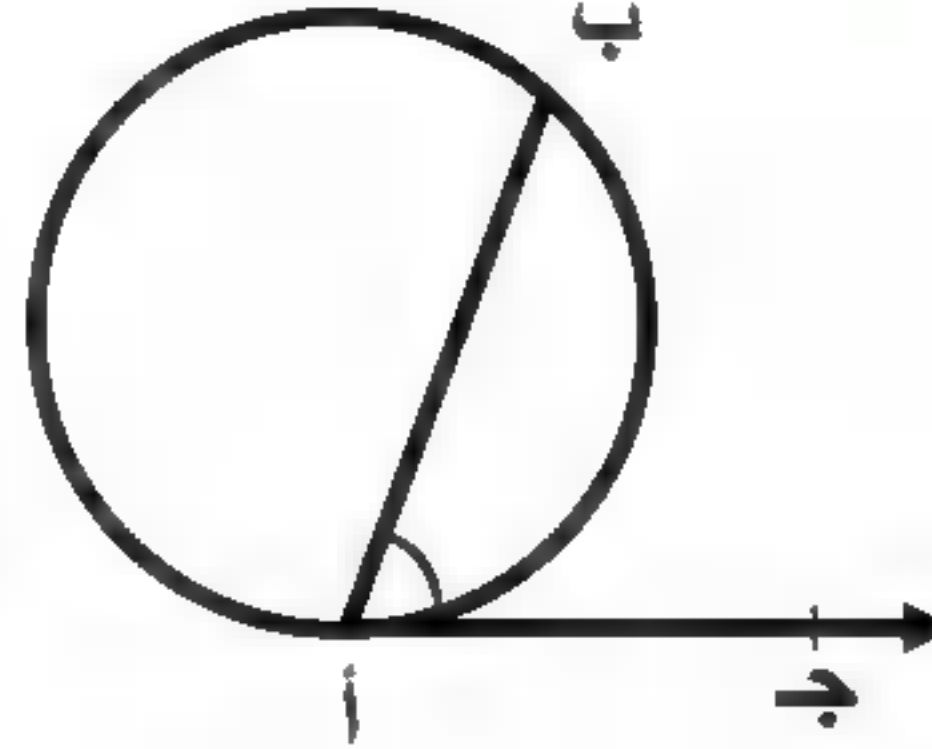
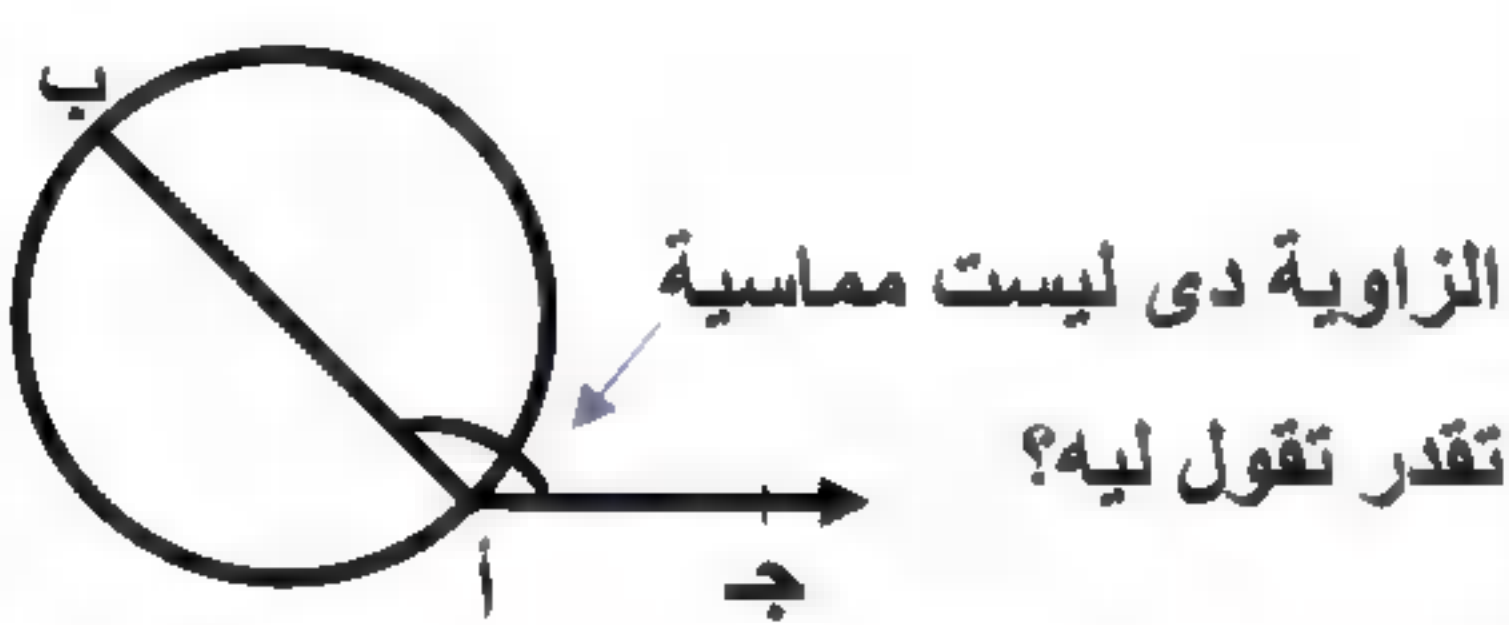


الزاوية المماسية

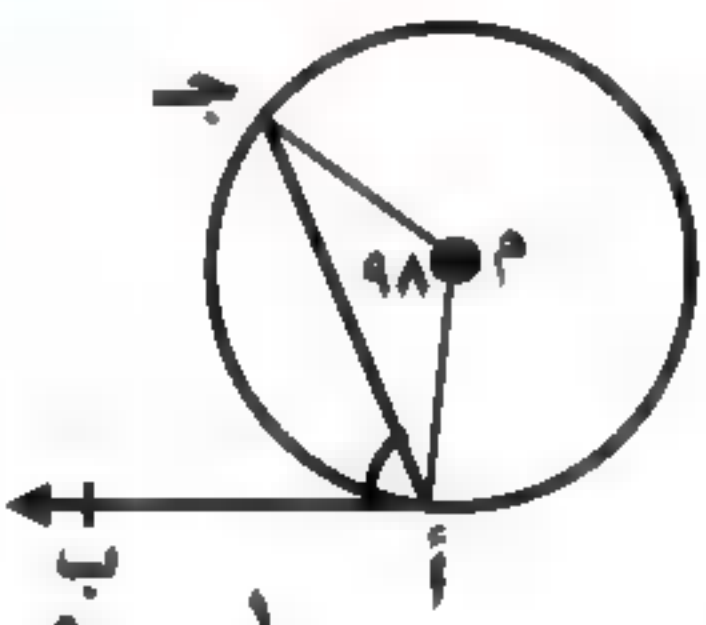
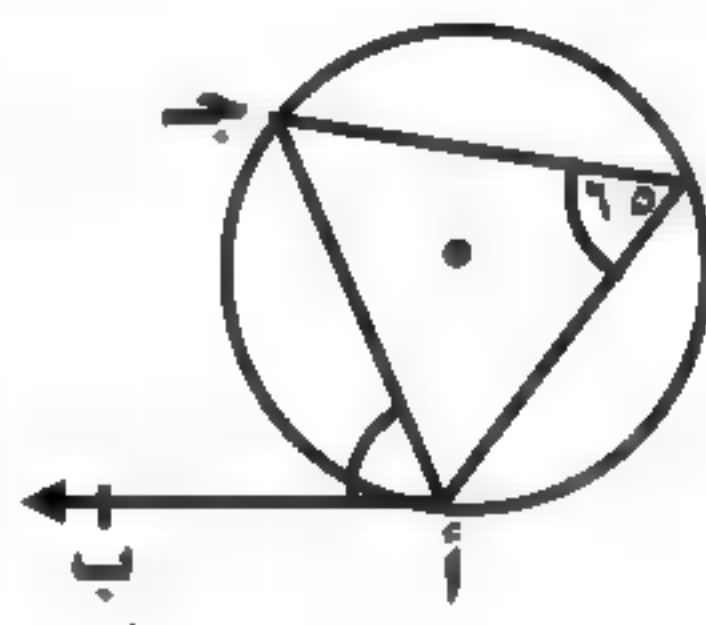
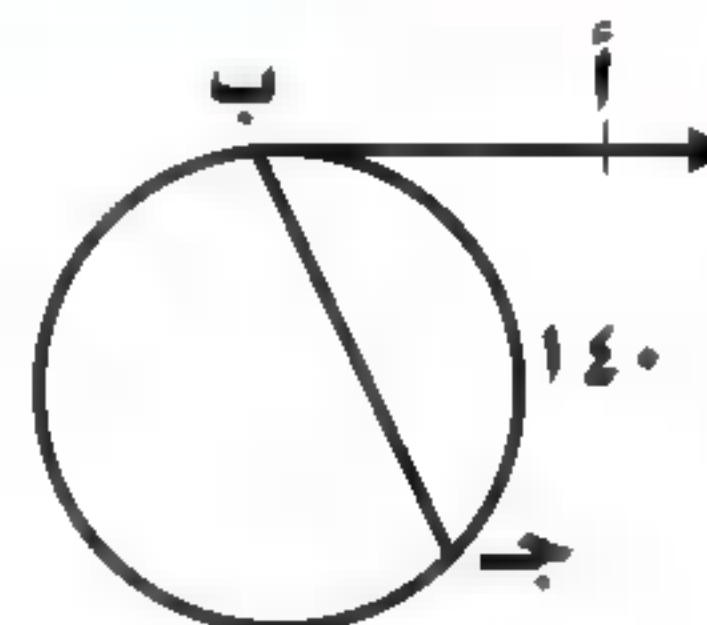
الدرس
الثامن

8

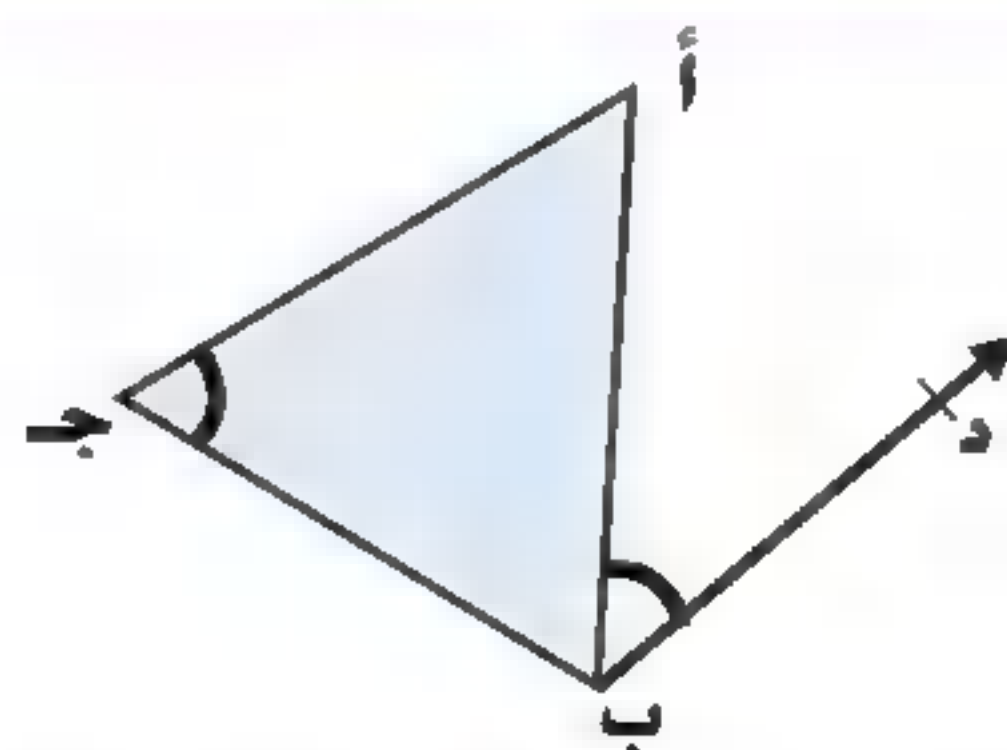
الزاوية المماسية هي زاوية رأسها على الدائرة ومحصورة بين وتر ومماس



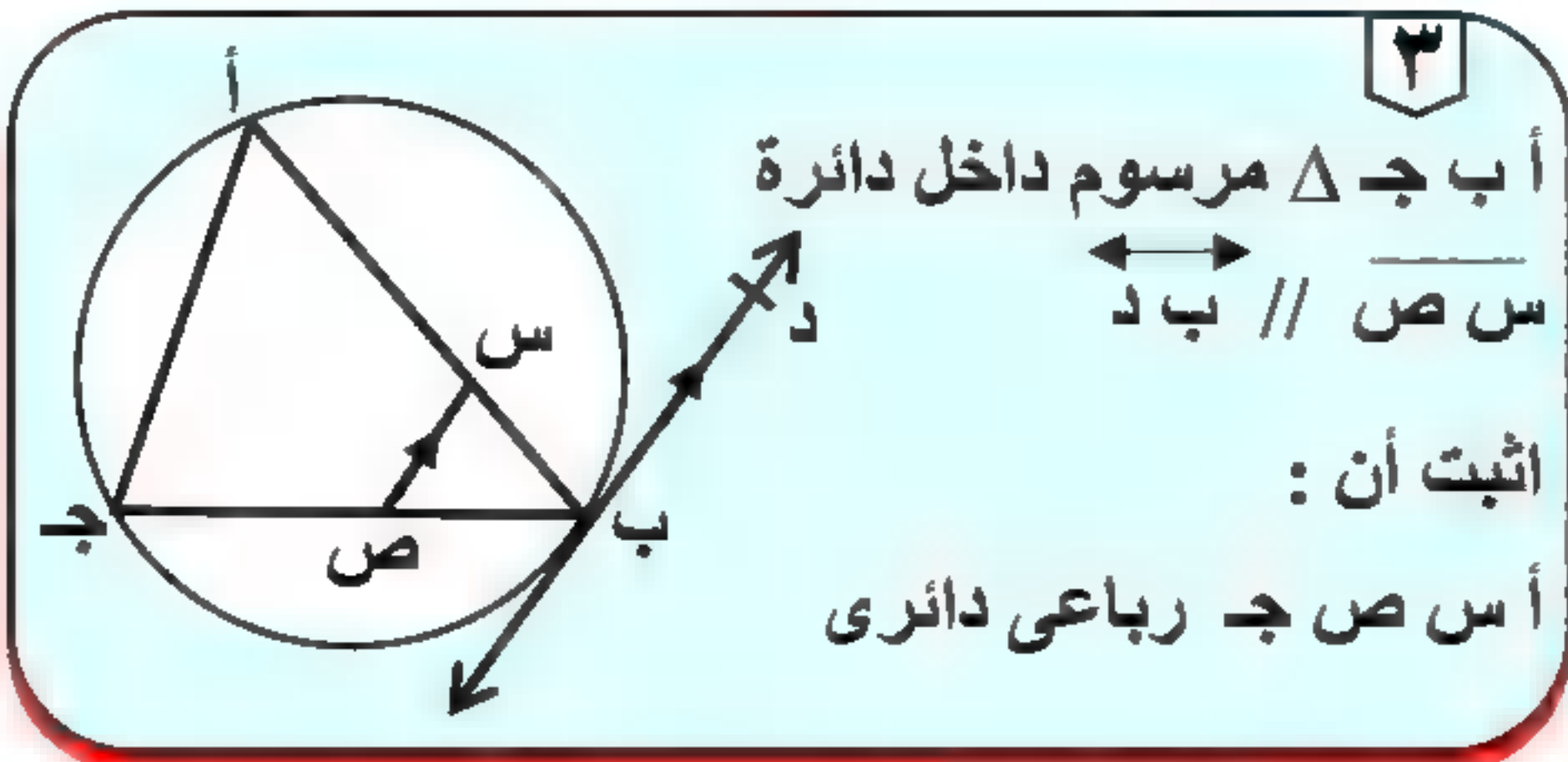
- ب أ ج زاوية مماسية
- القوس المقابل لها هو أ ب

قياس الزاوية المماسية	قياس الزاوية المماسية	قياس الزاوية المماسية
= نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس	= قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس	= نصف قياس القوس المقابل لها زى المحيطية بالضبط
 <p>ق (ج أ ب) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = 49°</p>	 <p>ق (ج أ ب) المماسية = ق (د) المحيطية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = 65°</p>	 <p>ق (أ ب ج) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج) ∴ ق (أ ب ج) = 70°</p>

لإثبات أن ب د مماس للدائرة التي تمر برؤوس Δ أ ب ج



نثبت أن :
ق (أ ب د) = ق (ج)



الحل

$$\therefore \text{س ص} // \text{ب د}$$

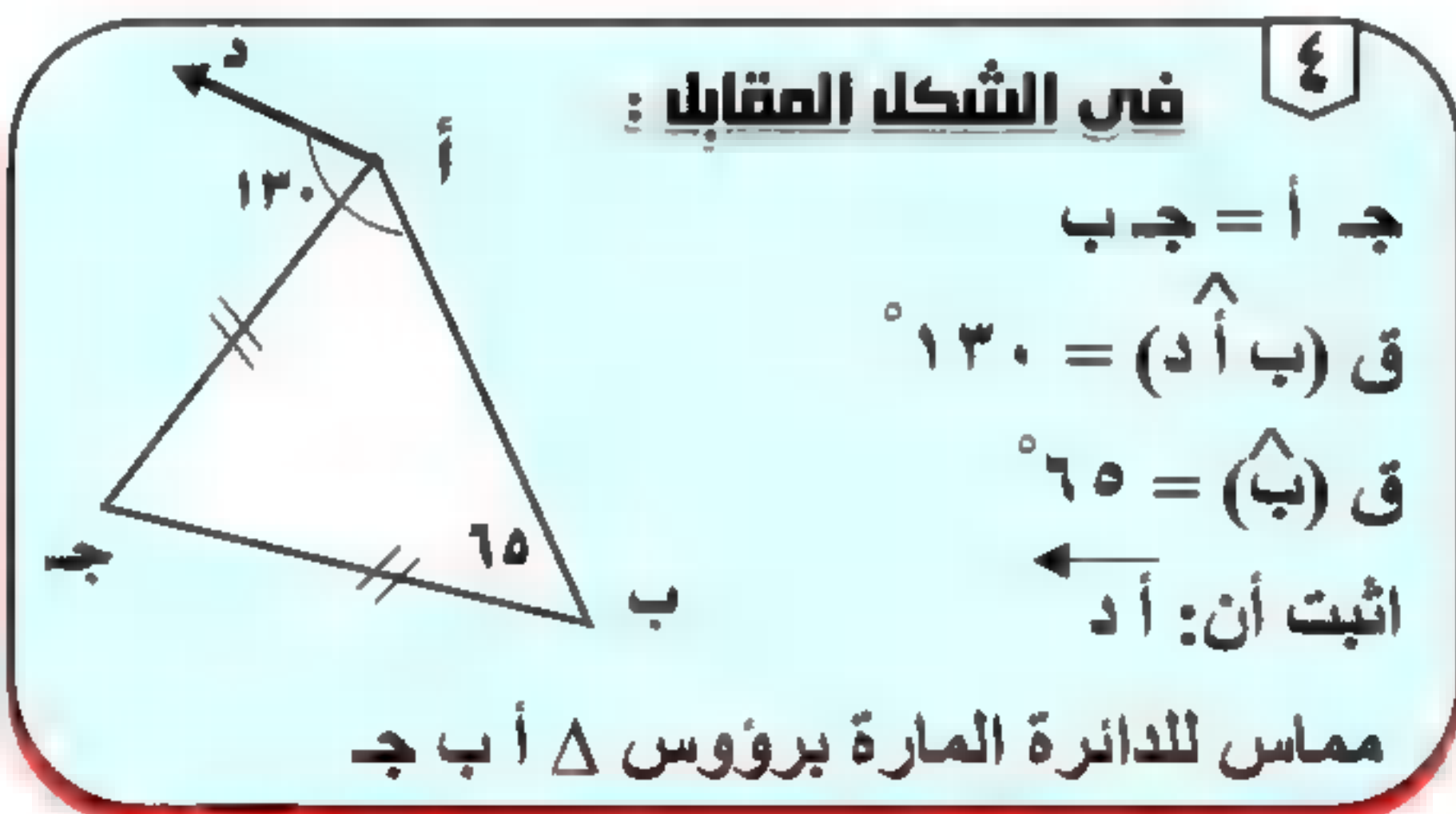
$$\therefore \text{ق (أ ب د)} = \text{ق (ص س ب)} \text{ بالتبادل } \leftarrow (١)$$

$$\therefore \text{ق (أ ب د)} = \text{المماسية} = \text{ق (ج د)} \text{ المحيطية } \leftarrow (٢)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن :

$$\text{ق (ص س ب)} = \text{ق (ج د)}$$

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة
 \therefore الشكل أ س ص ج رباعي دائري



الحل

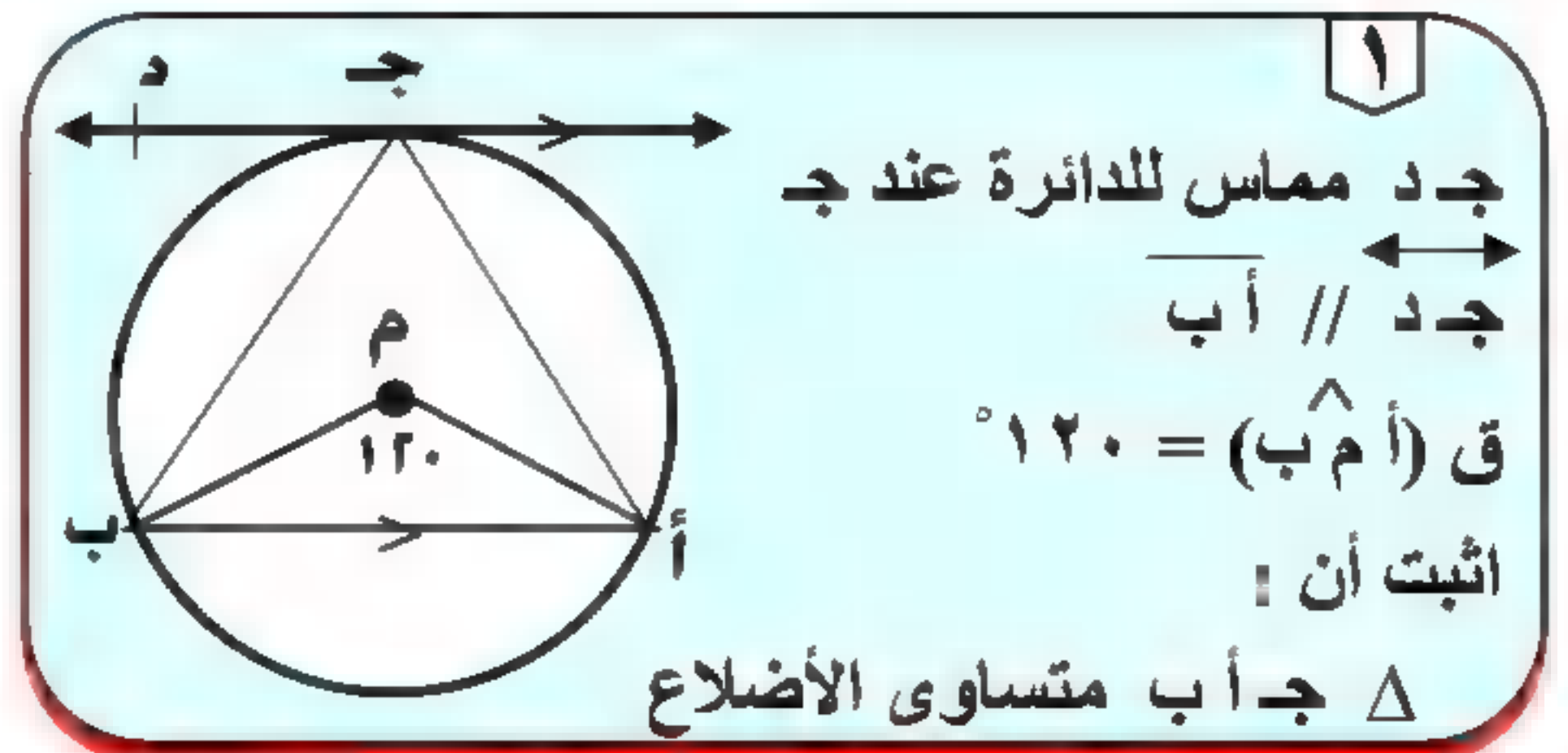
$$\therefore \text{ج أ} = \text{ج ب}$$

$$\therefore \text{ق (ج أ ب)} = \text{ق (ب)} = 65^\circ$$

$$\therefore \text{ق (د أ ج)} = 130^\circ - 65^\circ = 65^\circ$$

$$\therefore \text{ق (د أ ج)} = \text{ق (ب)}$$

\therefore أ د مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ج



الحل

$$\therefore \text{ج د} // \text{أ ب}$$

$$\therefore \text{ق (د ج ب)} = \text{ق (ج ب أ)} \text{ بالتبادل } \leftarrow (١)$$

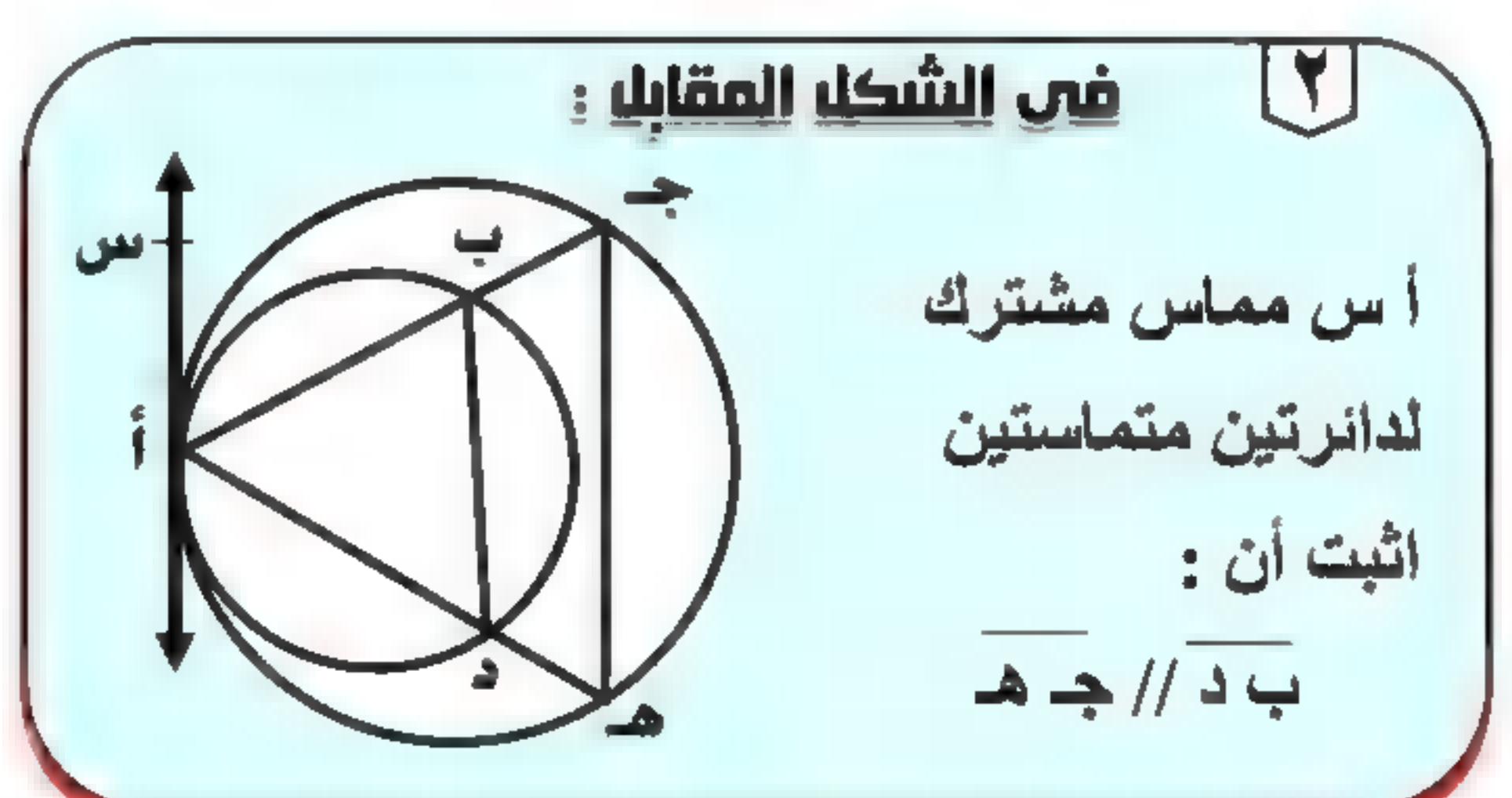
$$\therefore \text{ق (د ج ب)} = \text{المماسية} = \text{ق (ج أ ب)} \text{ المحيطية } \leftarrow (٢)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ج ب أ) = ق (ج أ ب)

$\therefore \Delta$ ج أ ب متساوي الساقين

$$\therefore \text{ق (م)} = \text{المركزية} = 120^\circ \therefore \text{ق (أ ج ب)} = 60^\circ$$

$\therefore \Delta$ ج أ ب متساوي الأضلاع



الحل

في الدائرة الصغرى :

$$\therefore \text{ق (س أ ب)} = \text{المماسية} = \text{ق (أ د ب)} \text{ المحيطية } \leftarrow (١)$$

مشاركتان في القوس أ ب

في الدائرة الكبرى :

$$\therefore \text{ق (س أ ج)} = \text{المماسية} = \text{ق (أ هـ ج)} \text{ المحيطية } \leftarrow (٢)$$

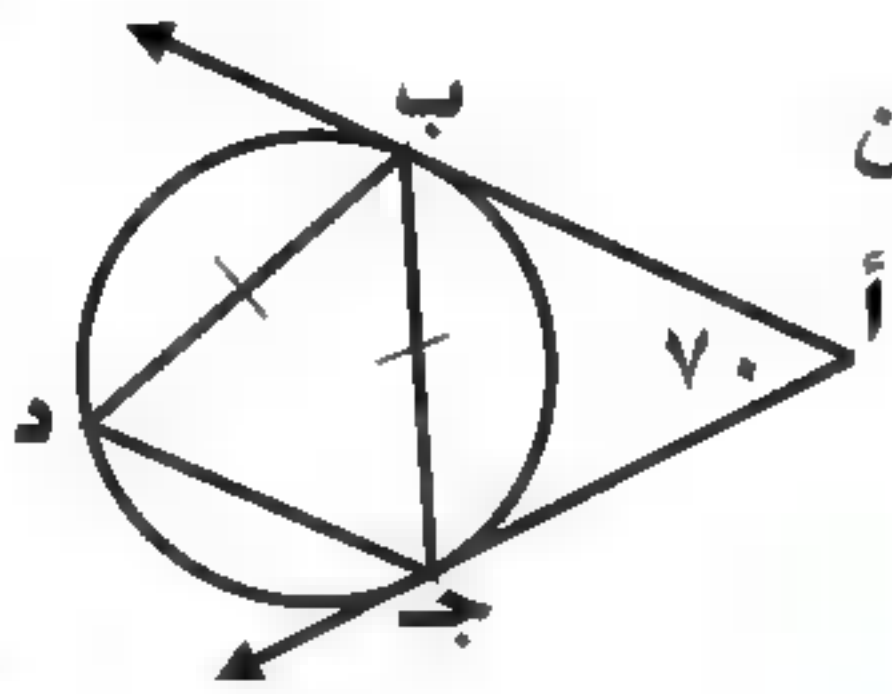
لأنهما مشاركتان في القوس أ ج

من ١ ، ٢ ينتج أن :

$$\text{ق (أ د ب)} = \text{ق (أ هـ ج)} \text{ وهما في وضع تناظر}$$

$\therefore \text{ب د} // \text{ج هـ}$

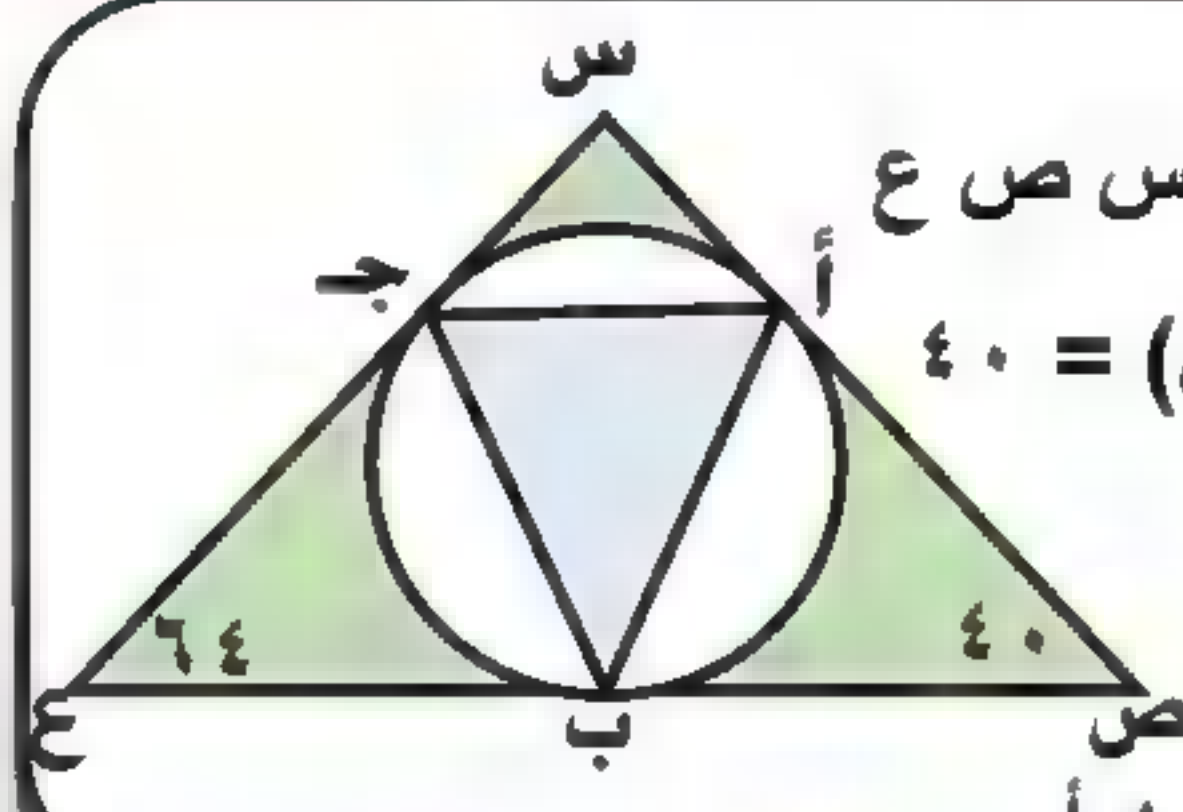
٢



أ ب ، أ ج قطعتان مماستان
 ب ج = ب د
 ق (أ) = ٧٠°
 أوجد: ق (أ ب د)

الحل

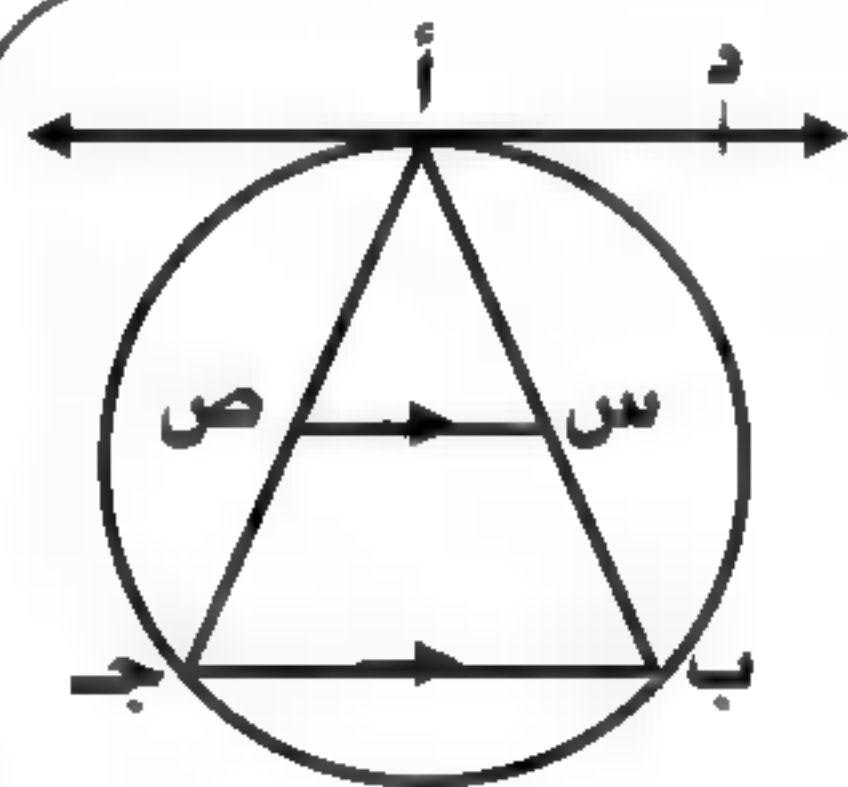
١



دائرة تمس أضلاع \triangle س ص ع
 في أ ، ب ، ج ، ق (ص) = ٤٠°
 ق (ع) = ٦٤°
 أوجد قياسات زوايا \triangle أ ب ج

الحل

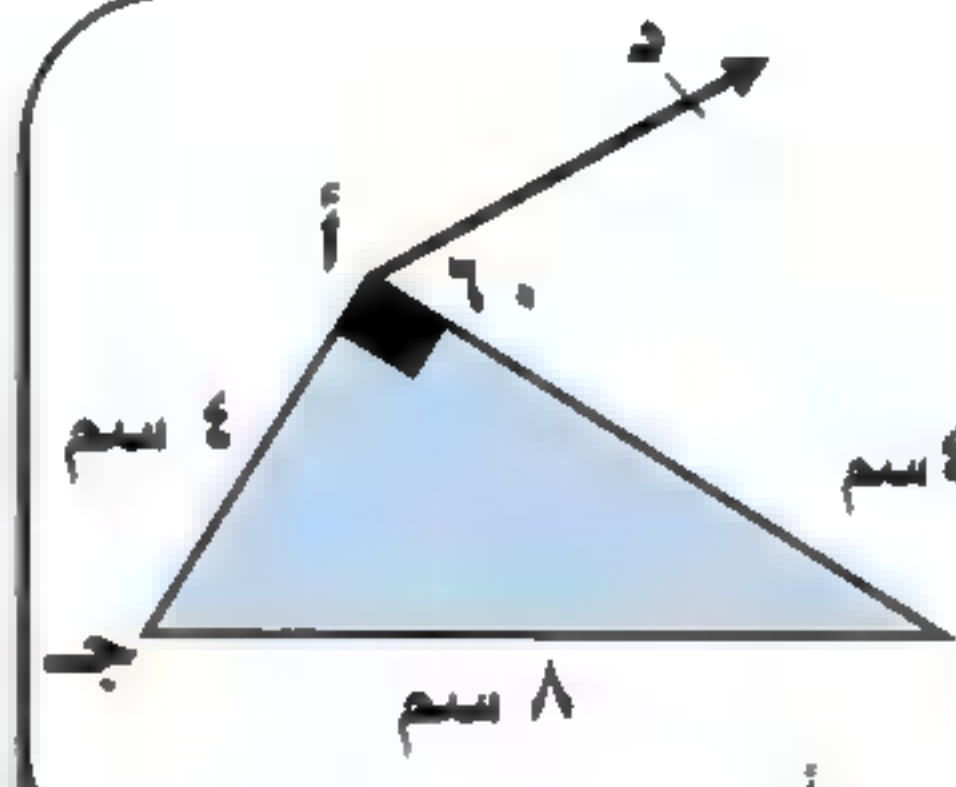
٤



أ ب ج \triangle مرسوم داخل دائرة
 أ د مماس للدائرة
 س ص // ب ج
 اثبت أن: أ د مماس للدائرة
 المارة برؤوس \triangle أ س ص

الحل

٣



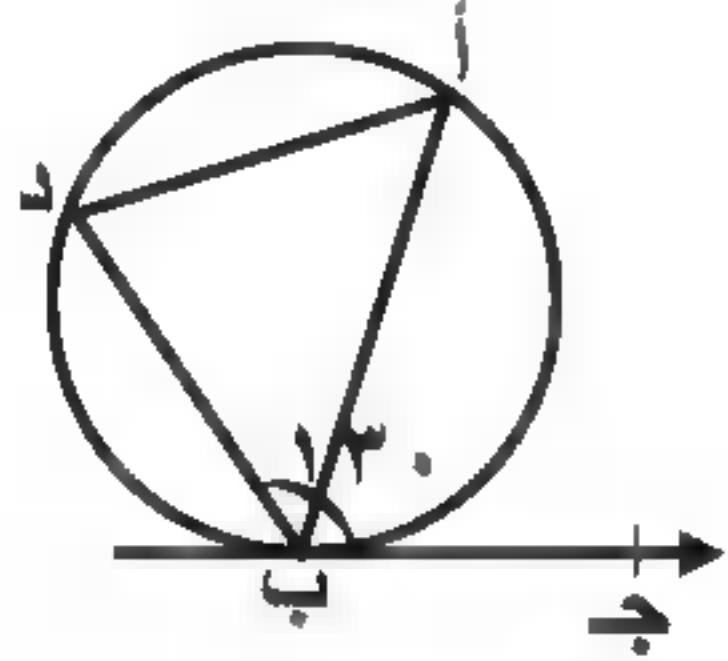
أ ب ج \triangle قائم في أ
 ق (د أ ب) = ٦٠° ، أ ج = ٤ سم
 ب ج = ٨ سم ، اثبت أن: أ د مماس
 للدائرة المارة برؤوس أ ب ج

الحل

اختر الإجابة الصحيحة:

1 الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين

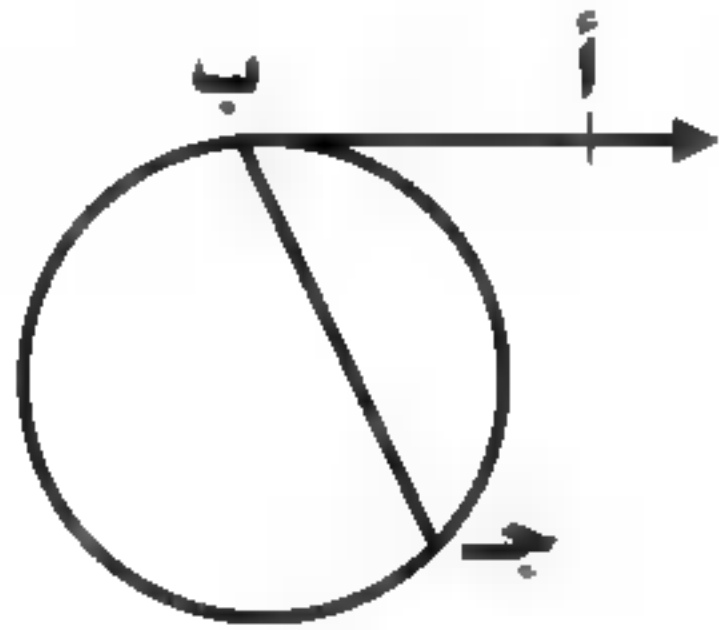
- (أ) وتران (ب) مماسان (ج) وتر ومماس (د) وتر وقطر



2 في الشكل المقابل : ب ج مماس للدائرة

ق (د ب ج) = ١٣٠° فإن ق (أ) =°

- (أ) ٥٠ (ب) ٦٥ (ج) ١٣٠ (د) ١٨٠



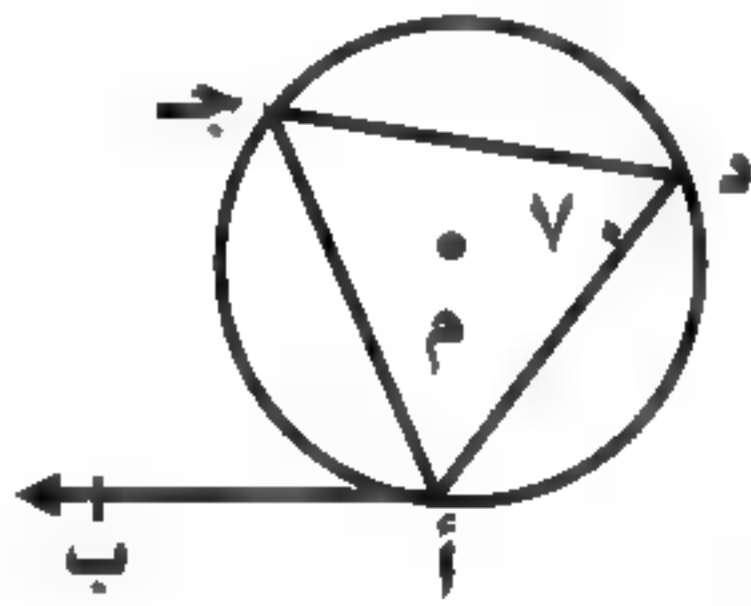
3 في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة

ق (ب ج) = ثلث قياس الدائرة فإن ق (أ ب ج) =°

- (أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (ج) ١٢٠ (د) ٣٠

4 قياس القوس المقابل لزاوية مماسية قياسها ٦٠ يساوي°

- (أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (ج) ١٢٠ (د) ٩٠



5 في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة م عند ب

ق (ج د أ) = ٧٠° فإن ق (ج أ ب) =°

- (أ) ١٤٠ (ب) ٣٥ (ج) ٧٠ (د) ١١٠

في الشكل المقابل:

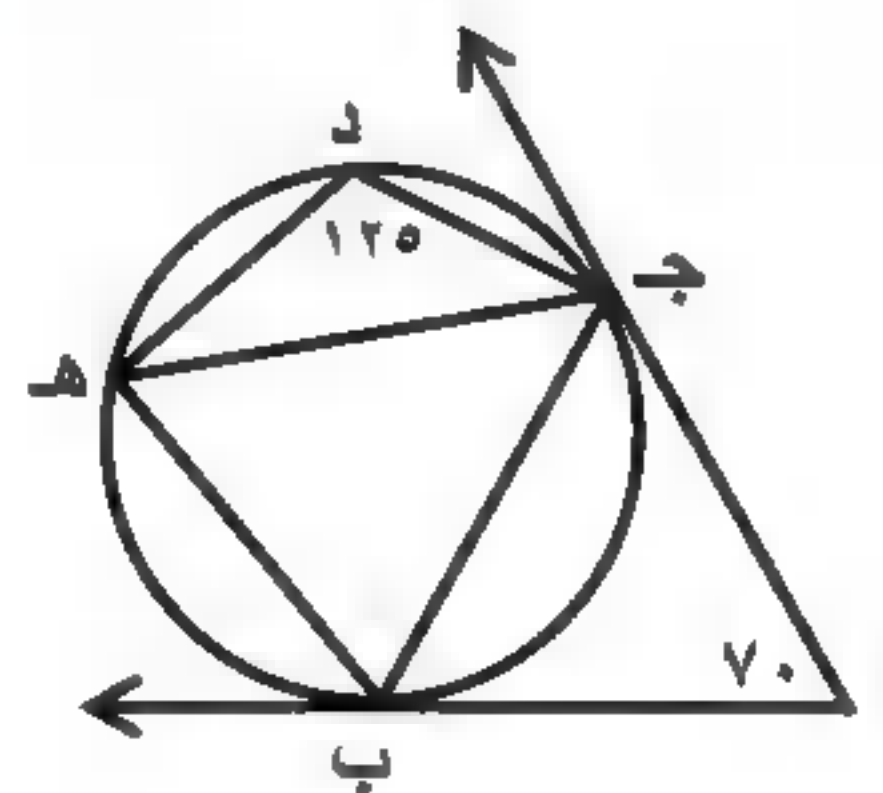
أ ب ، أ ج مماسان للدائرة

ق (أ) = ٧٠°

ق (ج د هـ) = ١٢٥°

اثبت أن : ١- ج ب = ج هـ

٢- أ ج // ب هـ



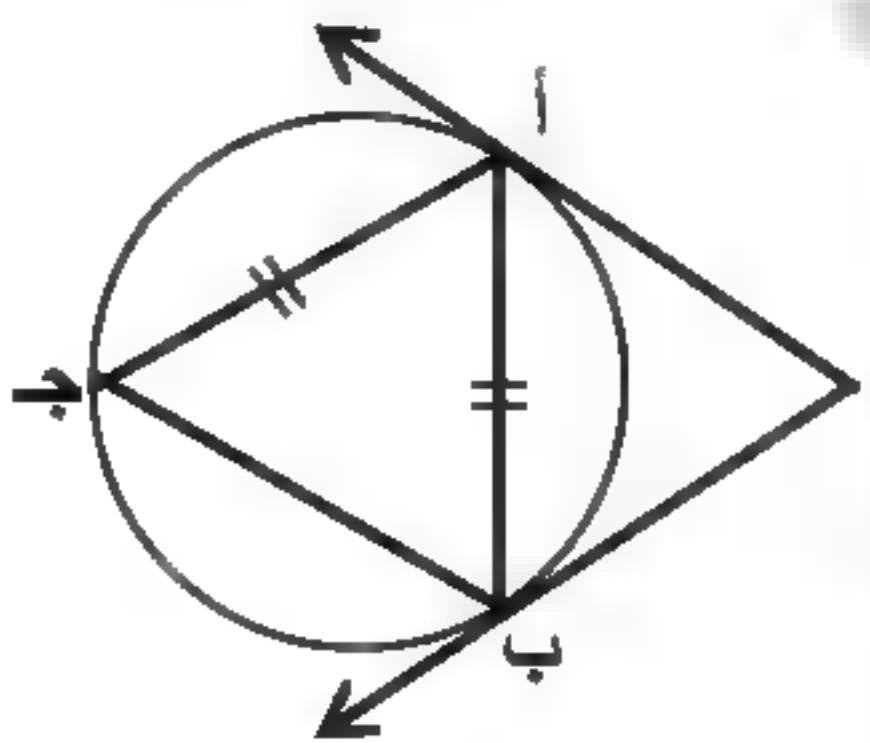
في الشكل المقابل:

د أ ، د ب مماسين

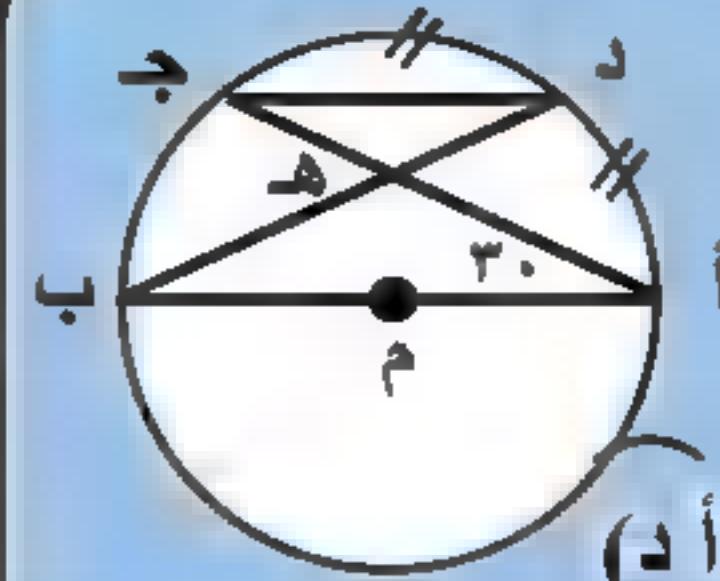
أ ب = أ ج

اثبت أن : أ ج مماس للدائرة

المارة برؤوس المثلث أ ب د



١ في الشكل المقابل:



أ ب قطر في الدائرة م
ق (ج أ ب) = 30°
د منتصف أ ج

١- أوجد ق (ب د ج) ، ق (أ د)

٢- اثبت أن : أ ب // ج د

الحل

∴ ق (ب د ج) = ق (ج أ ب)

محيطيتان مشتركتان في ج ب

∴ ق (ب د ج) = 30° أولا

∴ ق (ج ب) = $30^\circ \times 2 = 60^\circ$

∴ ق (أ د ج) + ق (ج ب) = 180°

∴ ق (أ د ج) = $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

∴ ق (أ د) = ق (د ج) ∴ ق (أ د) = $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

∴ ق (د ب أ) المحيطية = $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

∴ ق (ب د ج) = ق (د ب أ) وهما متبادلتان ∴ أ ب // ج د

٢ في الشكل المقابل:



أ ب ، أ ج وتران متساويان في الطول
س منتصف أ ب ، ص منتصف أ ج
ق (ج أ ب) = 70°

١- أوجد ق (د م هـ)

٢- اثبت أن س د = ص هـ

الحل

∴ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق (م س أ) = 90°

∴ ص منتصف أ ج ∴ م ص ⊥ أ ج

∴ ق (م ص أ) = 90°

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ س م ص = 360°

∴ ق (د م هـ) = $360^\circ - (70^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 110^\circ$

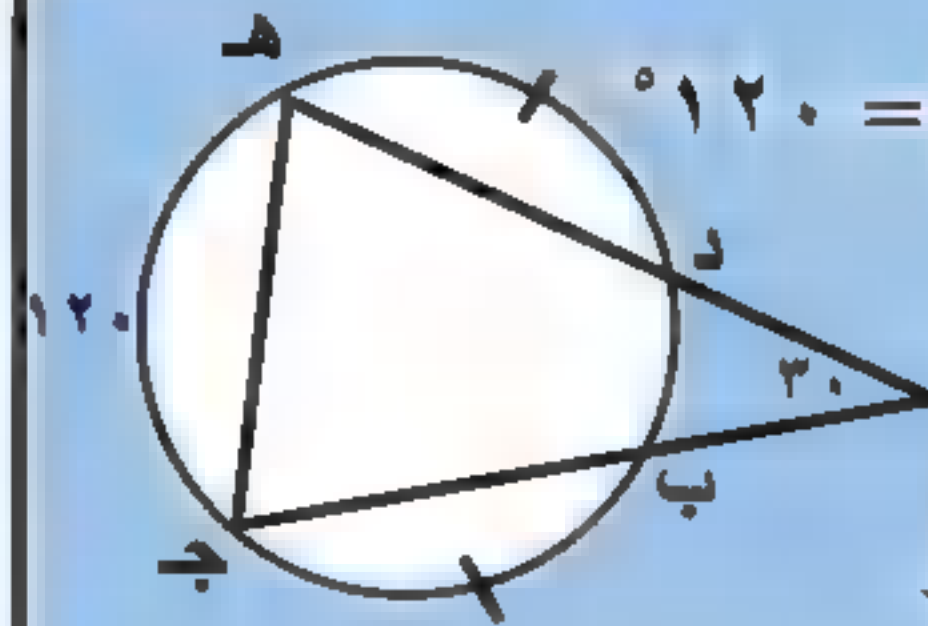
∴ أ ج = أ ب (أوتار متساوية)

∴ م ص = م س (أبعاد متساوية) ← (١)

∴ م هـ = م د (أنصاف أقطار) ← (٢)

بطرح ١ من ٢ ينتج: ص هـ = س د المطلوب الثاني

٣ في الشكل المقابل:



ق (أ) = 30° ، ق (هـ ج) = 120°
ق (ب ج) = ق (د هـ)

١- أوجد : ق (ب د) الأصغر

٢- اثبت أن : أ ب = أ د

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق (ب د) = ق (هـ ج) - ق (أ) = $120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

∴ ق (د هـ) = ق (ب ج) بإضافة د ب للطرفين

∴ ق (ب د هـ) = ق (د ب ج)

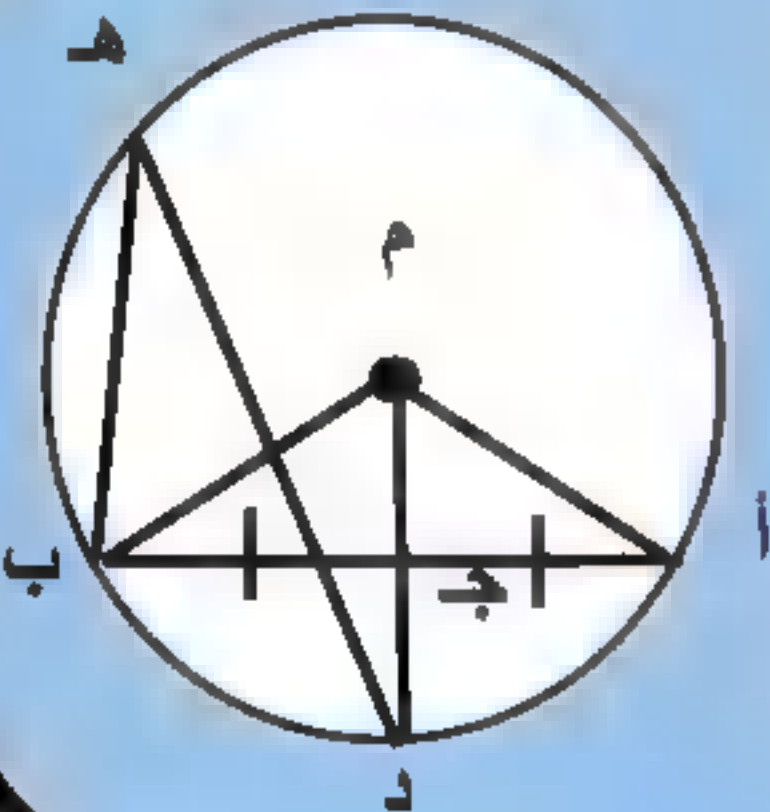
∴ ق (ج) المحيطية = ق (هـ) المحيطية

∴ أ ج = أ هـ ← (١)

∴ ق (د هـ) = ق (ب ج) ∴ د هـ = ب ج ← (٢)

بطرح ٢ من ١ ينتج أن : أ ب = أ د

٤ في الشكل المقابل:



ج منتصف أ ب

ق (م أ ب) = 20°

أوجد : ق (ب هـ د) ، ق (أ د ب)

الحل

∴ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ Δ م أ ب متساوي الساقين ∴ ق (م ب أ) = 20°

∴ ج منتصف أ ب ∴ م ج ⊥ أ ب ∴ ق (م ج ب) = 90°

في Δ م ج ب : ق (ج م ب) = $180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$

∴ ق (ب هـ د) = $\frac{1}{2}$ ق (د م ب)

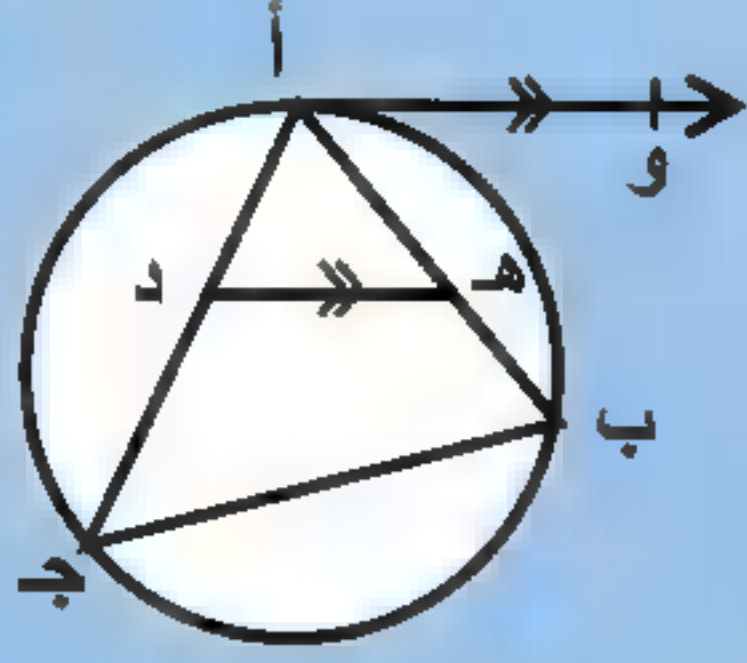
محيطية ومركزية مشتركتان في أ ب

∴ ق (ب هـ د) = 35° المطلوب الأول

في Δ أ م ب : ق (أ م ب) = $180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ$

∴ ق (أ د ب) = ق (أ م ب) المركزية = 140°

٦ في الشكل المقابل:



أ و مماس للدائرة عند أ
أو // د هـ
برهن أن :
د هـ ب ج شكل رباعي دائري

الحل

- ١: أ و // د هـ
٢: ق (و أ ب) = ق (أ هـ د) بالتبادل
٣: ق (و أ ب) المماسية = ق (ج هـ د) المحيطية

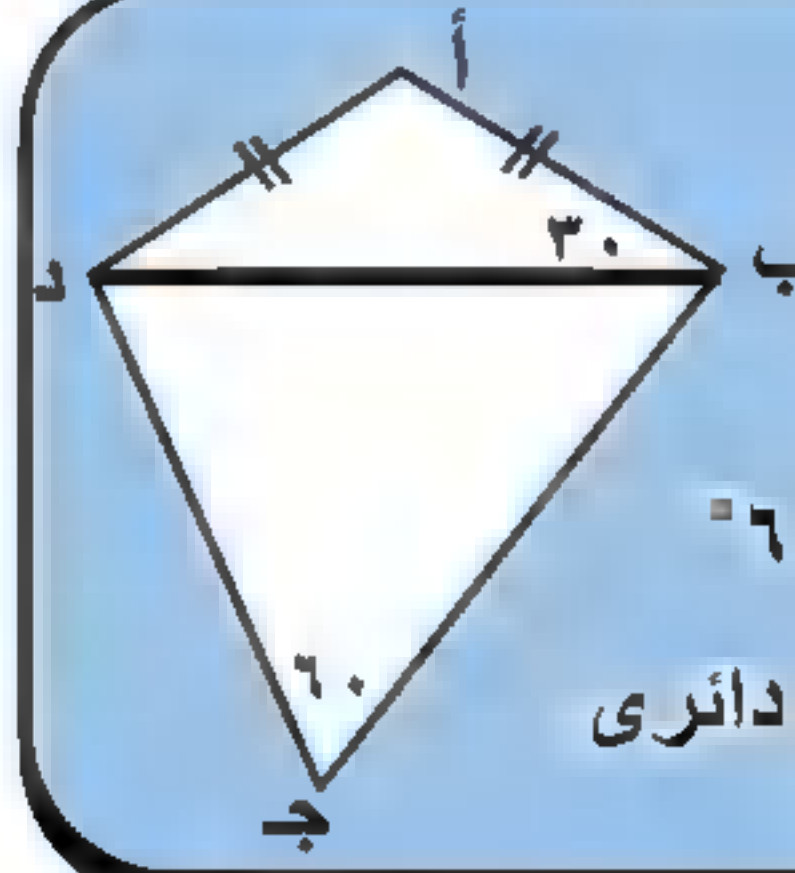
من ١ ، ٢ ينتج أن :

$$ق (أ هـ د) = ق (ج هـ د)$$

ونلاحظ أن أ هـ د زاوية خارجة ، ج هـ د المقابلة للمجاورة

∴ الشكل د هـ ب ج رباعي دائري

٥ في الشكل المقابل:



أ ب ج د شكل رباعي فيه
أ ب = أ د
ق (أ ب د) = ٣٠° ، ق (ج هـ د) = ٦٠°
اثبت أن: الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل

- ١: أ ب = أ د ∴ Δ أ ب د متساوي الساقين
٢: ق (أ د ب) = ٣٠°

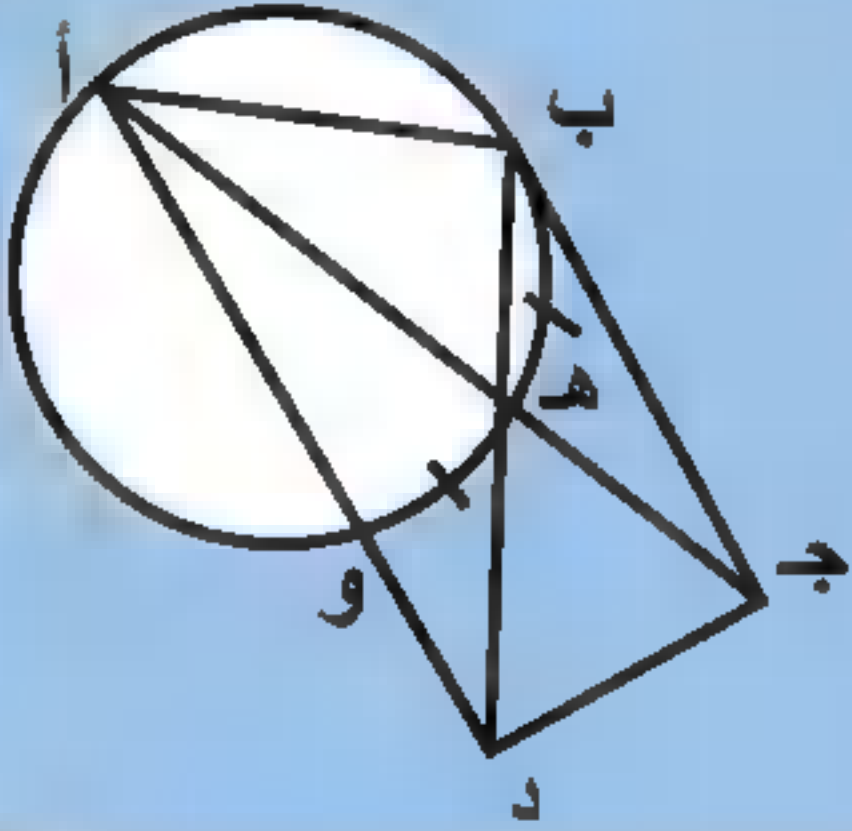
$$ق (أ) = ١٨٠ - (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°$$

$$ق (أ) + ق (ج هـ د) = ١٢٠ + ٦٠ = ١٨٠°$$

وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٨ في الشكل المقابل:



ب ج مماس للدائرة عند ب
هـ منتصف ب و
اثبت أن :
أ ب ج د رباعي دائري

الحل

- ١: ق (ب هـ د) = ق (هـ و د)
٢: ق (ب أ هـ) = ق (هـ أ و) بالتبادل
٣: ق (ب أ هـ) المحيطية = ق (ج ب هـ) المماسية

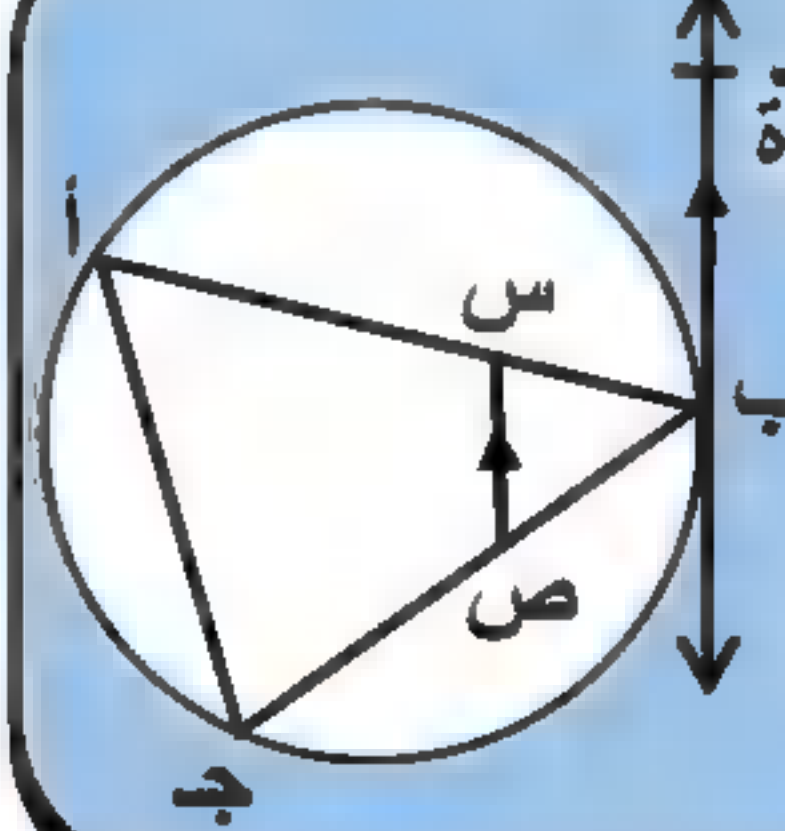
من ١ ، ٢ ينتج أن :

$$ق (ج ب هـ) = ق (هـ أ و)$$

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي ج د
وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٧ في الشكل المقابل:



أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة
د ب مماس للدائرة عند ب
س ص // ب د
اثبت أن:
أ س ص ج رباعي دائري

الحل

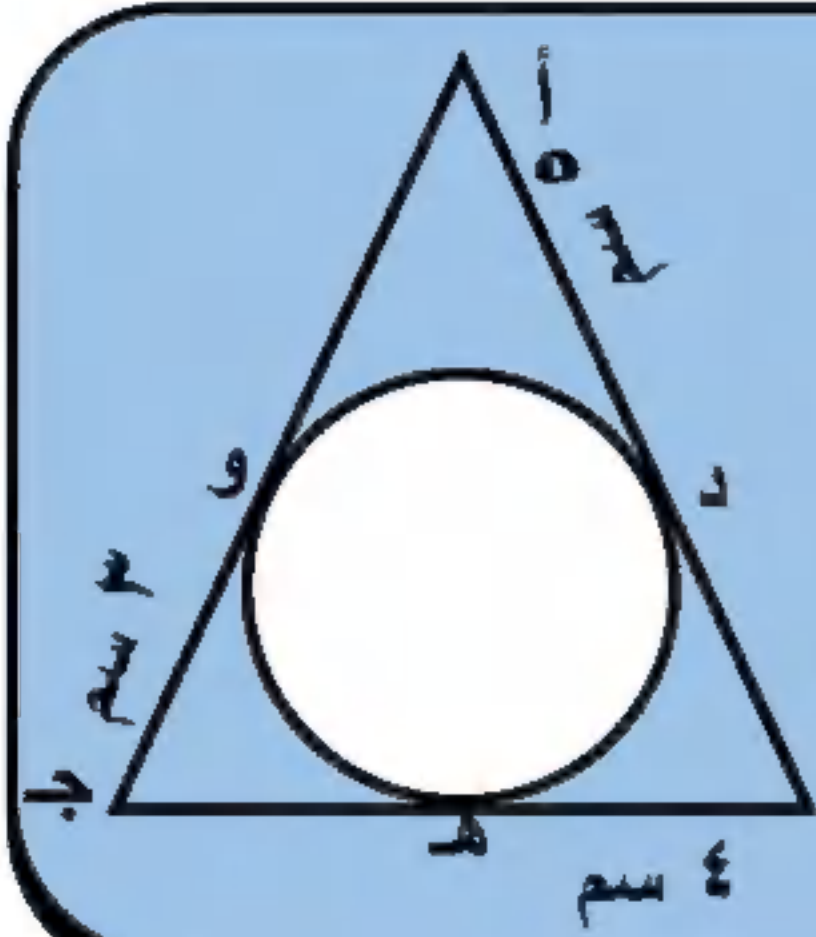
- ١: ق (أ ب د) = ق (ص س ب) بالتبادل
٢: ق (أ ب د) المماسية = ق (ج هـ د) المحيطية

من ١ ، ٢ ينتج أن :

$$ق (ص س ب) = ق (ج هـ د)$$

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص ج رباعي دائري

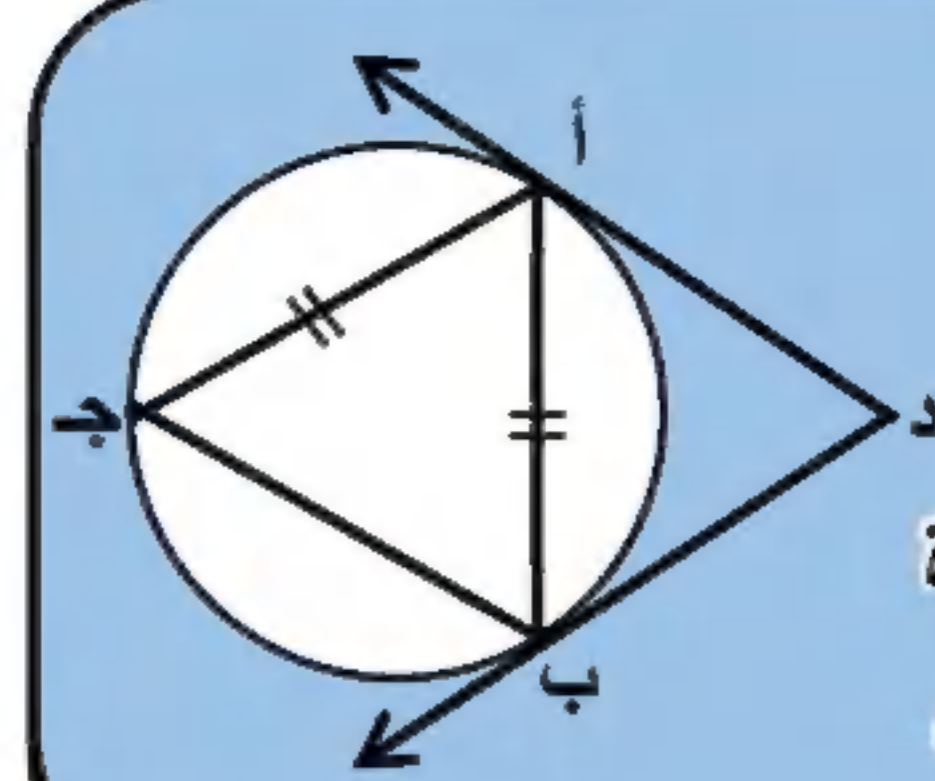


١٠ في الشكل المقابل:

Δ أ ب ج مرسوم خارج الدائرة م
وتمس أضلاعه أ ب ، أ ج ، ب ج
في د ، هـ ، و على الترتيب
أد = ٥ سم ، ب هـ = ٤ سم ، ج و = ٣ سم
أوجد محيط Δ أ ب ج

الحل

\therefore أد ، أو قطعتان مماستان \therefore أد = أو = ٥ سم
 \therefore ب د ، ب هـ قطعتان مماستان \therefore ب د = ب هـ = ٤ سم
 \therefore ج هـ ، ج و قطعتان مماستان \therefore ج هـ = ج و = ٣ سم
 \therefore أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، أ ج = ٥ + ٣ = ٨ سم
ب ج = ٤ + ٣ = ٧ سم
 \therefore محيط Δ أ ب ج = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم

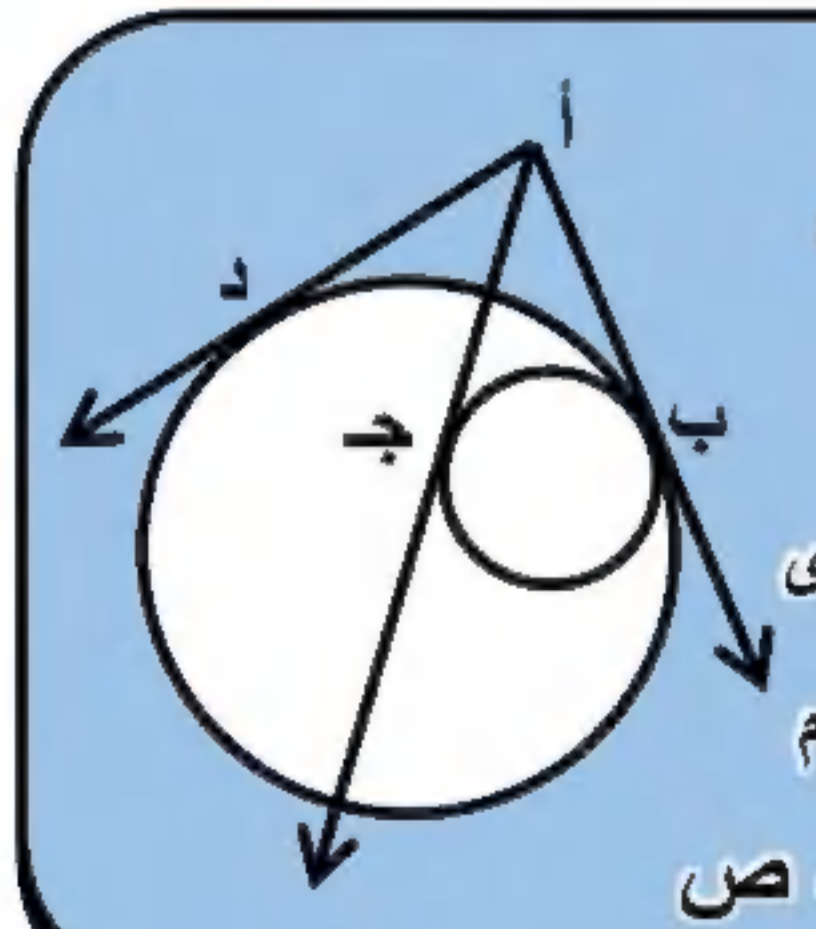


٩ في الشكل المقابل:

د أ ، د ب مماسين
أ ب = أ ج
اثبت أن : أ ج مماس للدائرة
المارة برؤوس المثلث أ ب د

الحل

في Δ أ ب ج : \therefore أ ب = أ ج
١ \therefore ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب)
في Δ أ ب د : \therefore د أ = د ب لأنهما قطعتان مماستان
٢ \therefore ق (د أ ب) = ق (د ب أ)
٣ \therefore ق (د أ ب) المماسية = ق (أ ج ب) المحيطة
من ١ ، ٢ ، ٣ وبمقارنة المثلثين ينتج أن :
ق (ب أ ج) = ق (د ب ج)
 \therefore أ ج مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د

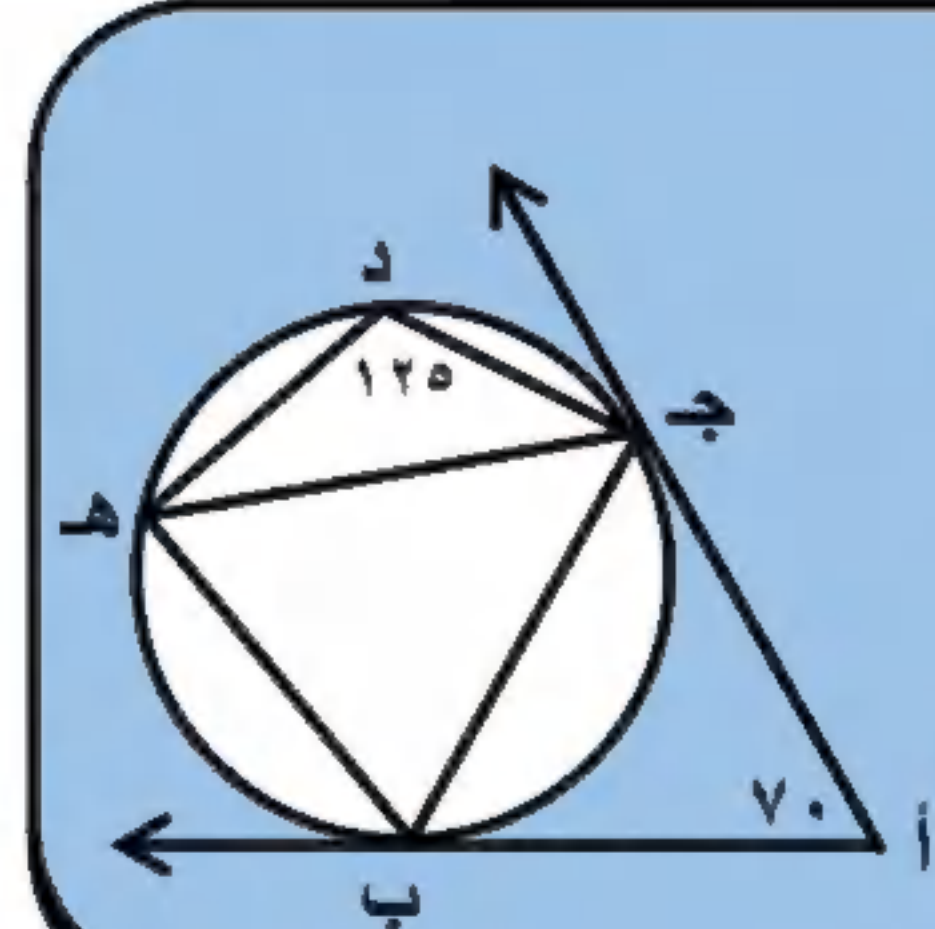


١٢ في الشكل المقابل:

دائرتان متماستان من الداخل في ب
أ ب مماس مشترك للدائرتين
أ ج مماس للصغرى ، أ ب مماس للكبرى
أ ج = ١٥ سم ، أ ب = (٣ - ص) سم
أ د = (٢ - ص) سم أوجد قيمة ص

الحل

\therefore أ ب = أ ج قطعتان مماستان للدائرة الصغرى
 \therefore أ ب = ١٥ سم \therefore ١٥ = ٣ - ص \therefore ١٨ = ص
 \therefore ص = ٩
 \therefore أ ب = أ د قطعتان مماستان للدائرة الكبرى
 \therefore أ د = ١٥ سم \therefore ١٥ = ٢ - ص
 \therefore ص = ١٧



١١ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج مماسان للدائرة
ق (أ) = ٧٠°
ق (ج د هـ) = ١٢٥°
اثبت أن : ١ - ج ب = ج هـ
٢ - أ ج // ب هـ

الحل

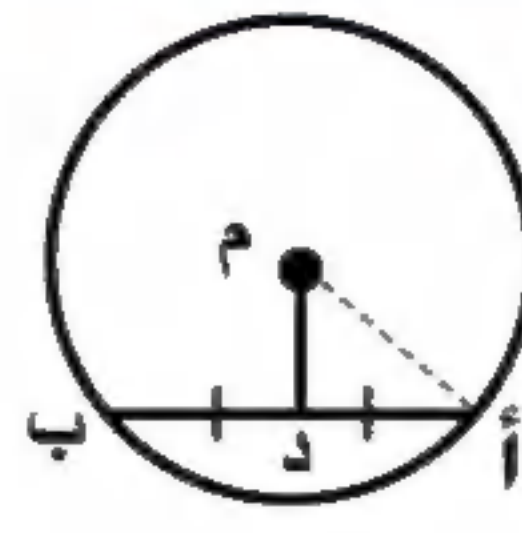
\therefore الشكل د ج ب هـ رباعي دائري
١ \therefore ق (ج ب هـ) = ١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥°
 \therefore أ ج ، أ ب قطعتان مماستان
 \therefore ق (أ ج ب) = ق (أ ب ج) = $\frac{٧٠ - ١٨٠}{٢}$ = ٥٥°
٢ \therefore ق (ب هـ ج) المحيطة = ق (أ ج ب) المماسية = ٥٥°
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ج ب هـ) = ق (ب هـ ج)
 \therefore Δ ج ب هـ متساوي الساقين \therefore ج ب = ج هـ أولا
 \therefore ق (أ ج ب) = ق (ج ب هـ) = ٥٥°
وهما متبادلتان \therefore أ ج // ب هـ

١



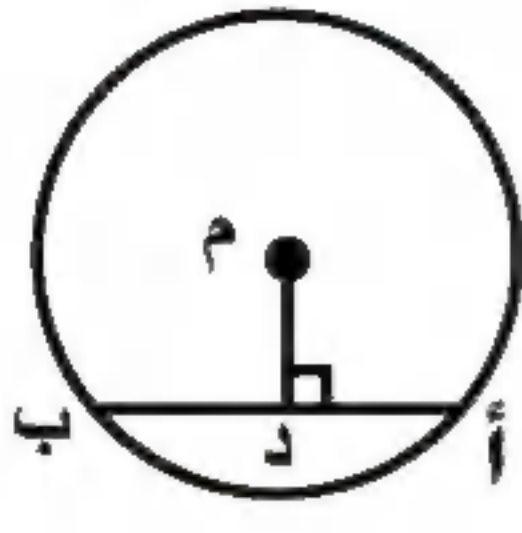
∴ $AM = MB$ (لأنهما أنصاف أقطار)
 ∴ $\triangle MAB$ متساوي الساقين
 أي أن: $\angle A = \angle B$ (ق (ب))

٢



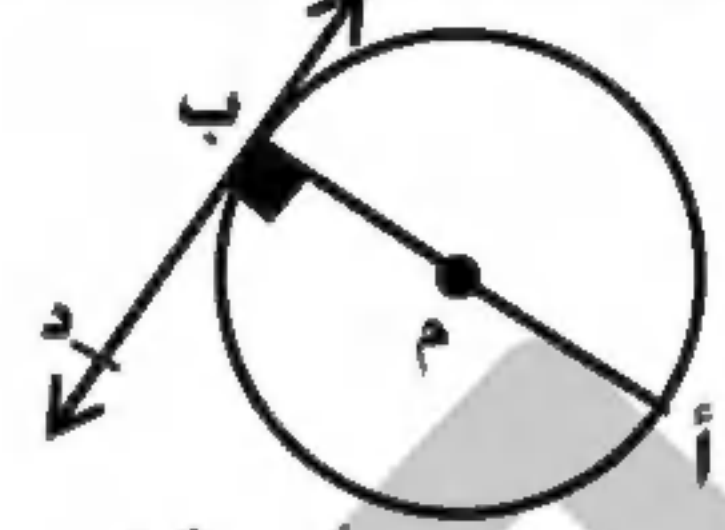
∴ D منتصف الوتر AB
 ∴ $MD \perp AB$
 ∴ $\triangle MAD$ قائم (يمكن تطبيق فيثاغورث)

٣



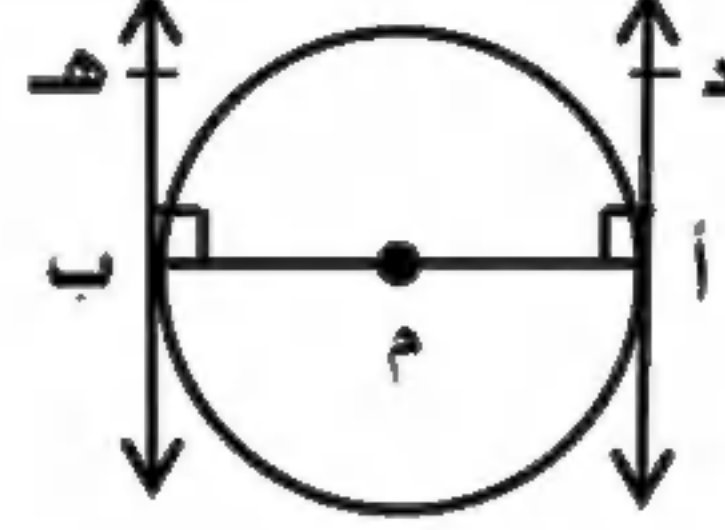
∴ $MD \perp AB$
 ∴ D منتصف AB ∴ $AD = DB$
 فإذا كان $AB = 8$ سم فإن $AD = 4$ سم

٤



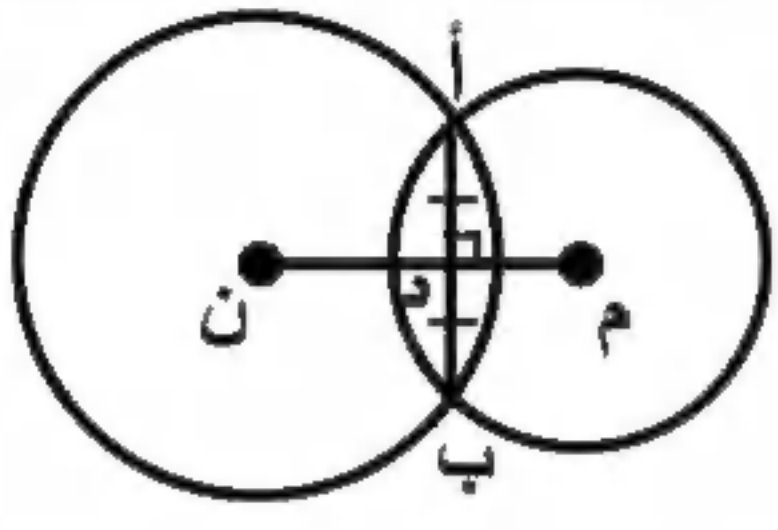
∴ BD مماس ، AB قطر
 ∴ $BD \perp AB$ (المماس \perp القطر)
 والعكس: إذا كانت Q (م $\angle B$) $= 90^\circ$
 ∴ BD مماس حيث B نقطة التماس

٥



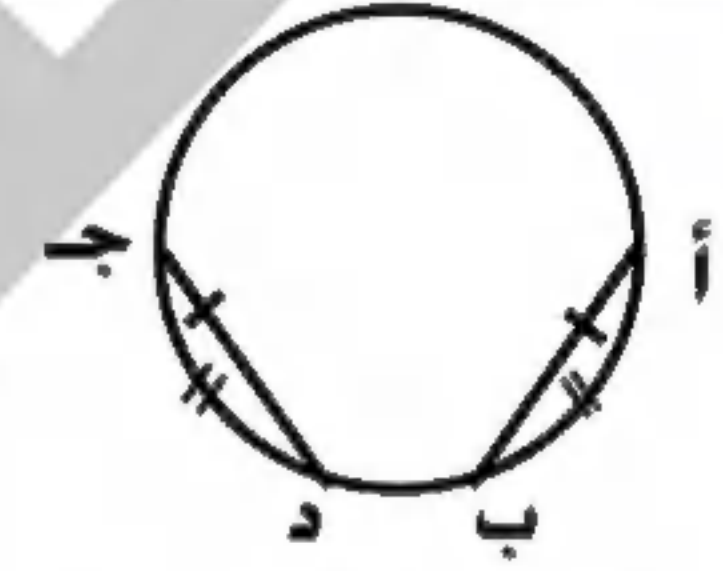
∴ DA, DB مماسان ، AB قطر
 ∴ $DA \parallel DB$
 ومتساوئان ان المماس \perp نصف القطر

٦



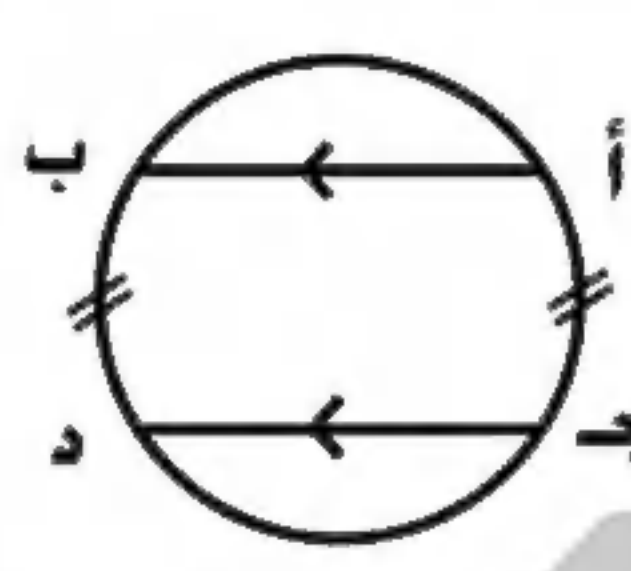
∴ AB وتر مشترك ، M من خط المركزين
 ∴ $MN \perp AB$ ، M من ينصف AB
 خط المركزين هو محاور تماثل الوتر المشترك

٧



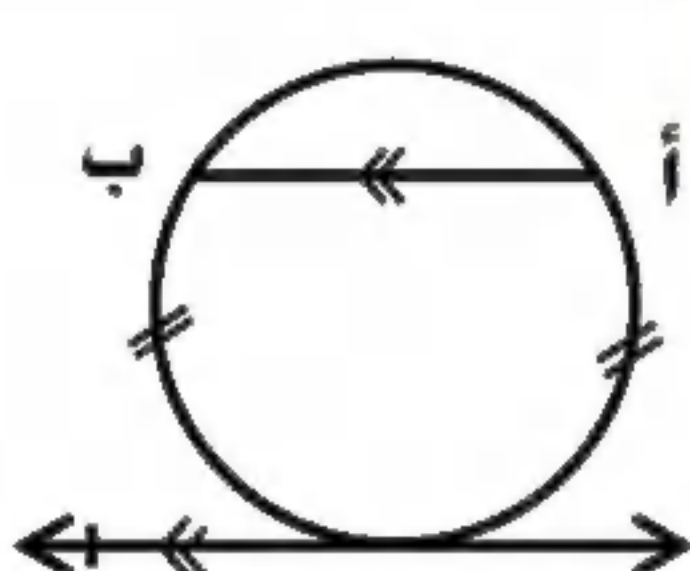
∴ $Q(AB) = Q(CD)$ الأقواس متساوية
 ∴ $AB = CD$ الأوتار متساوية
 والعكس صحيح

٨



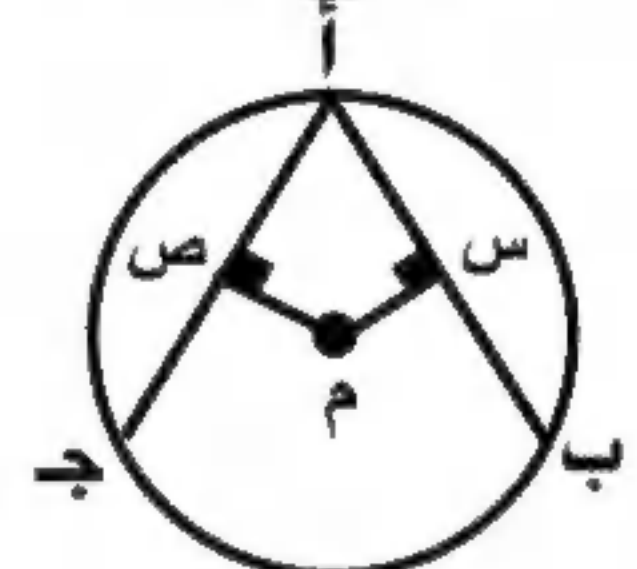
∴ الوتر $AB \parallel$ الوتر CD
 ∴ $Q(A) = Q(B)$

٩



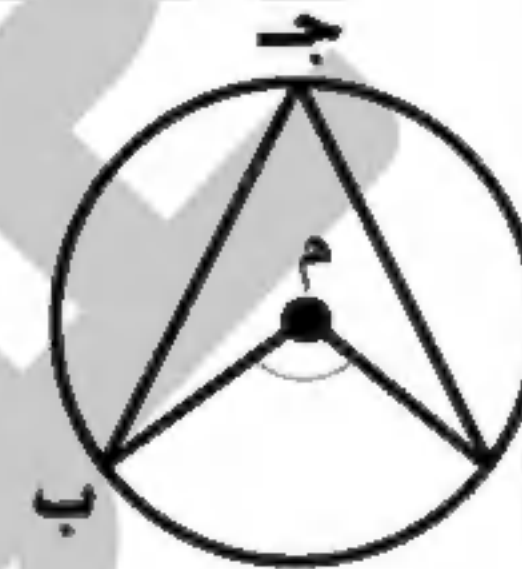
∴ الوتر $AB \parallel$ المماس CD
 ∴ $Q(A) = Q(B)$

١٠



∴ $AB = AC$ (الأوتار متساوية)
 ∴ $MS = MS$ (الأبعاد متساوية)
 والعكس صحيح

١١



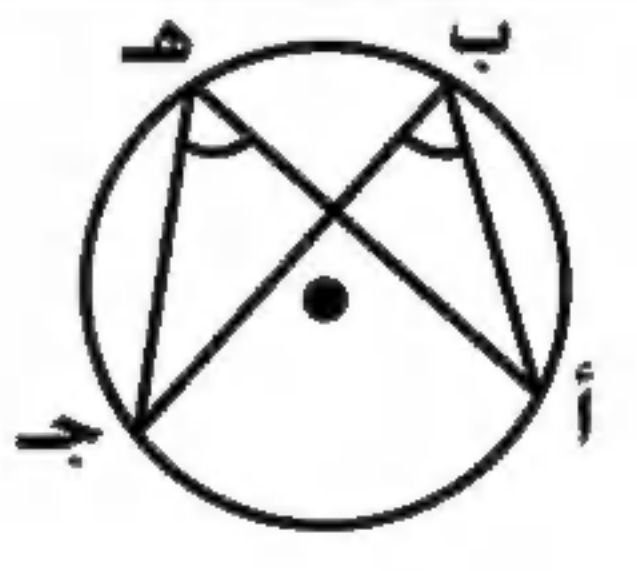
∴ $Q(AB) = Q(AM)$ المركزية
 ∴ $Q(AB) = 2Q(A)$ المحيطة

١٢



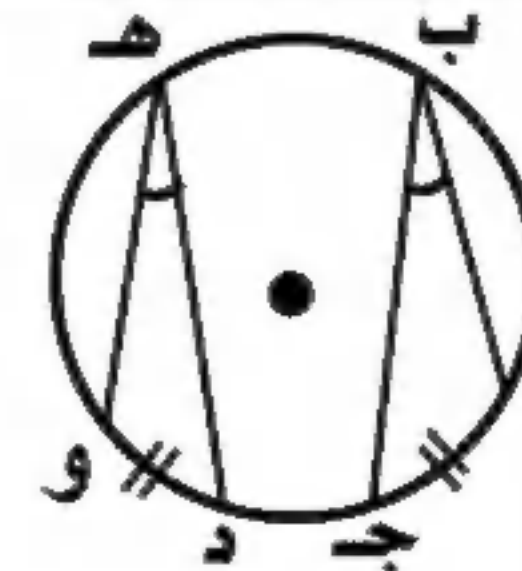
∴ $Q(CD)$ المحيطة $= \frac{1}{4}Q(AM)$ المركزية
 ∴ $Q(CD) = \frac{1}{4}Q(AB)$

١٣



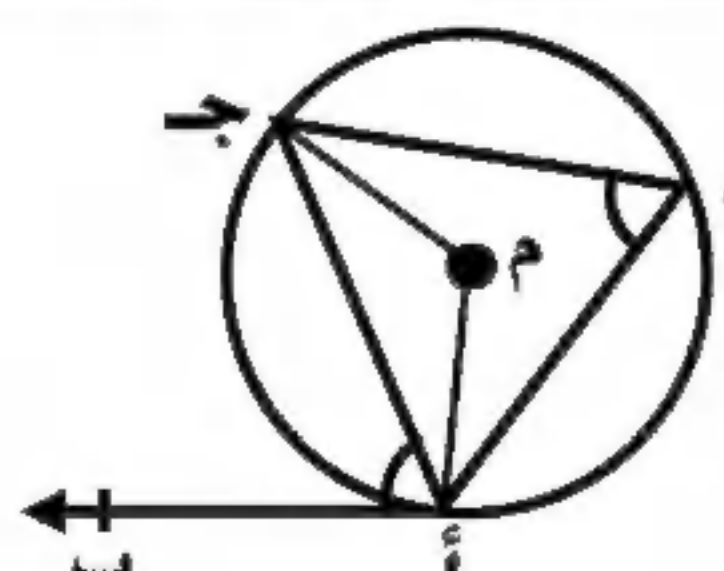
∴ $Q(B) = Q(H)$
 محيطتان مشتركتان في القوس A
 كذلك: $Q(A) = Q(C)$

١٤



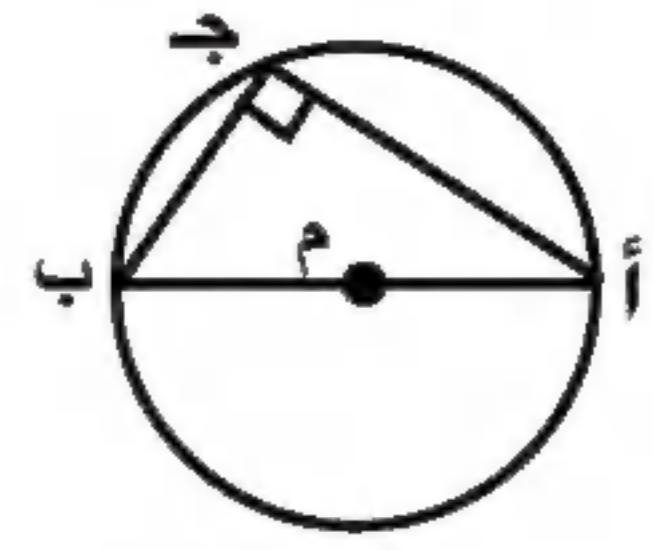
∴ $Q(A) = Q(D)$
 ∴ $Q(B) = Q(H)$
 محيطتان أقواسهم متساوية (والعكس صحيح)

١٥



∴ $Q(CD)$ المماسية $= Q(D)$ المحيطة
 ∴ $\frac{1}{4}Q(M)$ المركزية
 المركزية ضعف المماسية وضعف المحيطة

١٦

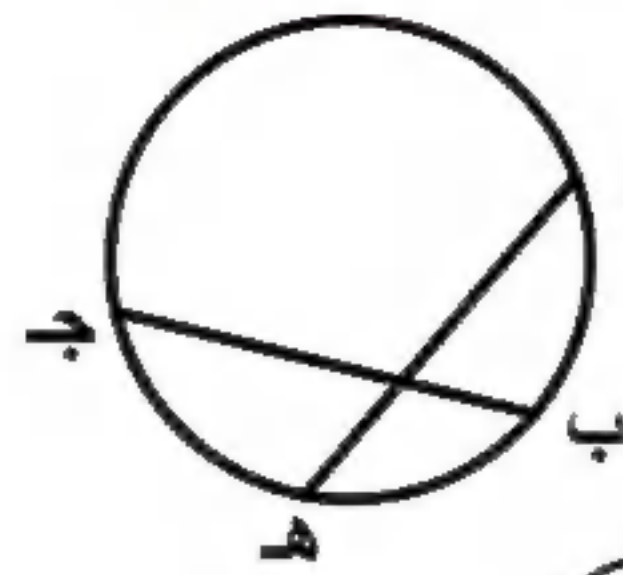


∴ AB قطر

∴ ق (أ ب) = ٩٠

محيطية مرسومة في نصف دائرة

١٧

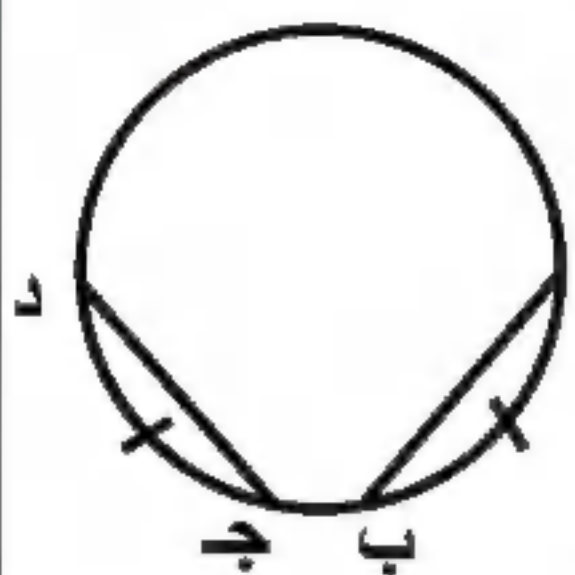


ق (أ ب هـ) = ق (أ ب) + ق (ب هـ)

ق (ب هـ جـ) = ق (جـ هـ) + ق (ب هـ)

لاحظ أن : القوس ب هـ مشترك بينهما

١٨

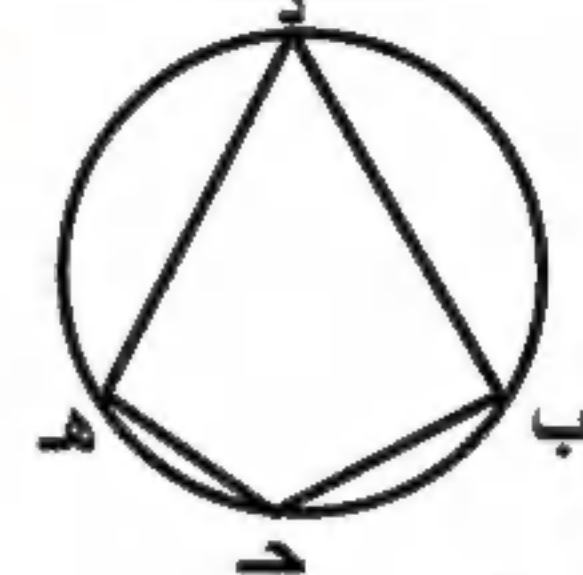
الأقواس المتساوية في الطول
متساوية في القياس
والعكس

∴ طول AB = طول جـ د

∴ ق (أ ب) = ق (جـ د)

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق}$

١٩

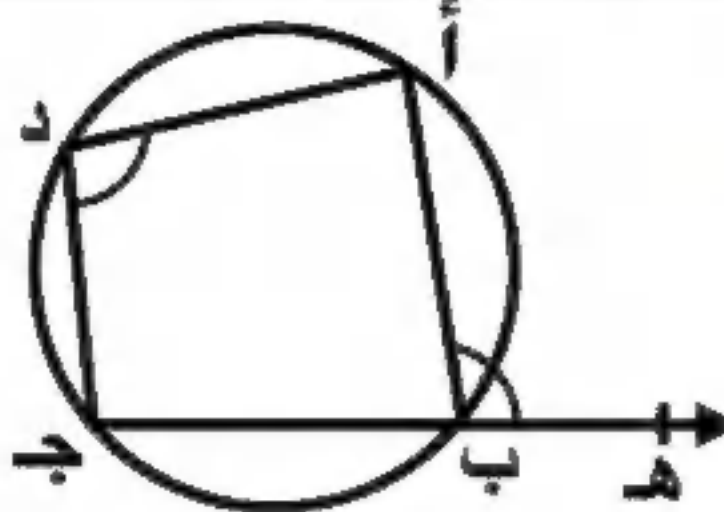
∴ الشكل د ب جـ هـ
رباعي دائري

∴ ق (د) + ق (جـ) = ١٨٠

ق (أ) + ق (هـ) = ١٨٠

كل زاويتان متقابلتان مجموعهما = ١٨٠

٢٠

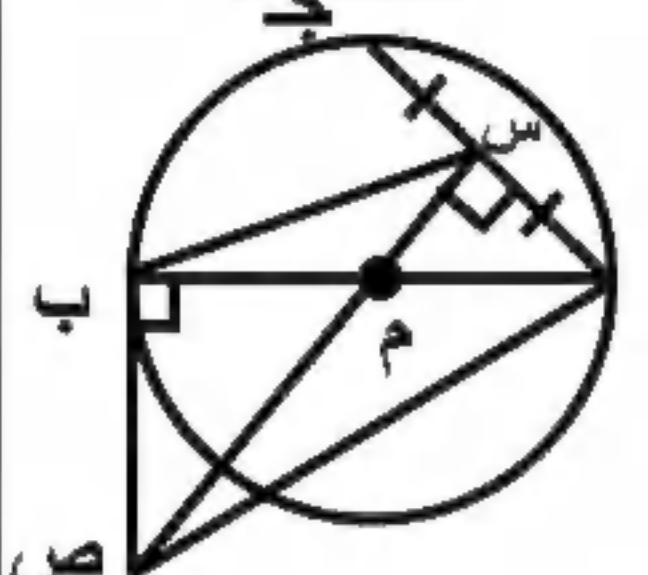


∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق (أ ب هـ) الخارجة = ق (د)

الزاوية الخارجة = المقابلة للمجاورة

٢١



∴ ب ص مماس

∴ ق (أ ب ص) = ٩٠

∴ س منتصف أ جـ

∴ ق (أ س ص) = ٩٠

∴ ق (أ ب ص) = ق (أ س ص)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة أ ص

∴ الشكل أ س ب ص رباعي دائري

٢٢



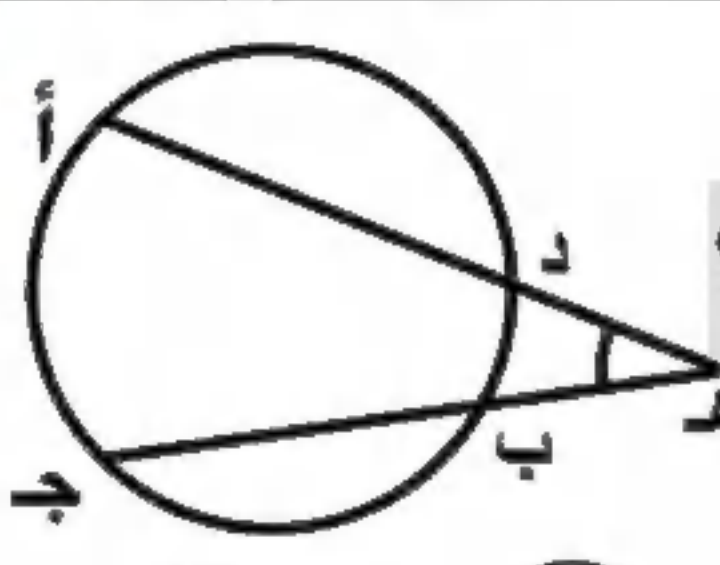
تعريف مشهور ١

ق (د هـ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق (أ جـ) + ق (د ب)]

ق (أ جـ) = ٢ ق (د هـ ب) - ق (د ب)

ق (د ب) = ٢ ق (د هـ ب) - ق (أ جـ)

٢٣



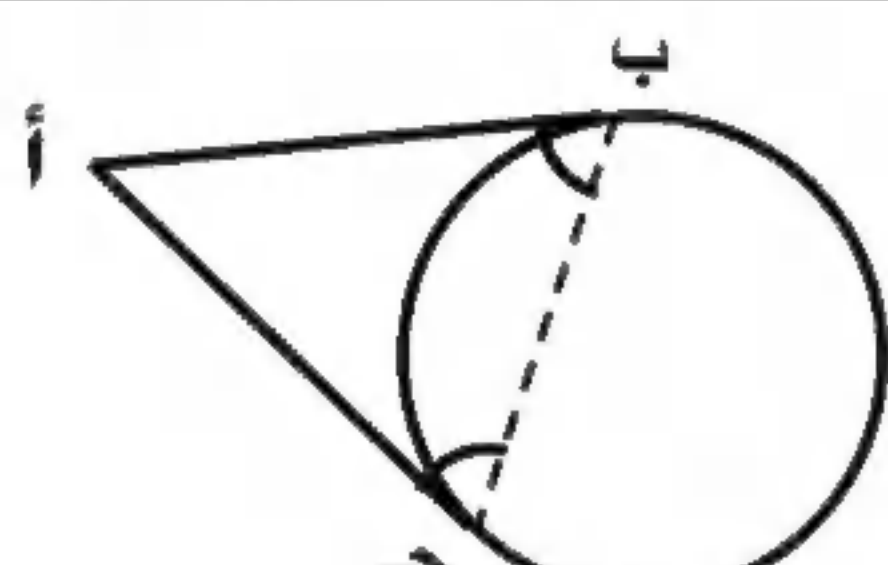
تعريف مشهور ٢

ق (هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (أ جـ) - ق (د ب)]

ق (أ جـ) = ٢ ق (هـ) + ق (د ب)

ق (د ب) = ٢ ق (هـ) - ق (أ جـ)

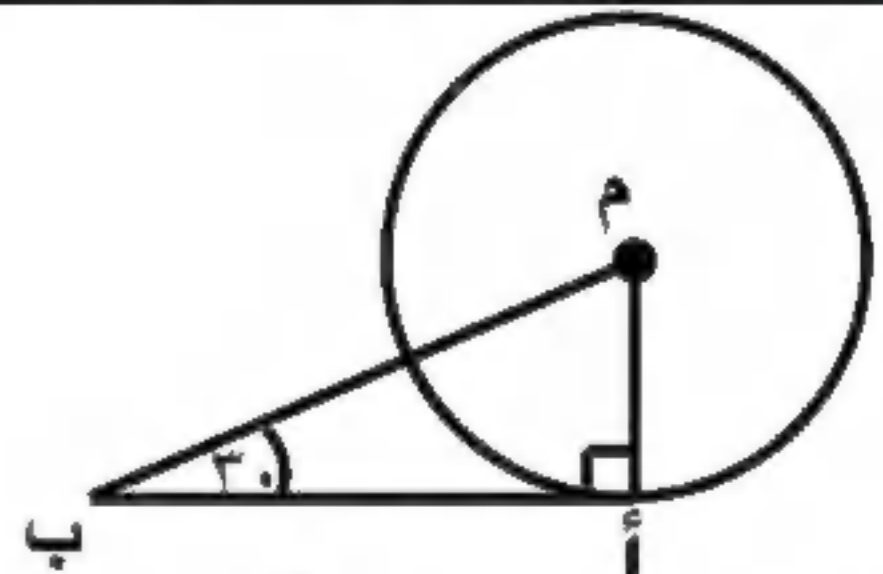
٢٤



∴ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

∴ أ ب = أ جـ ، ق (ب) = ق (جـ)

٢٥

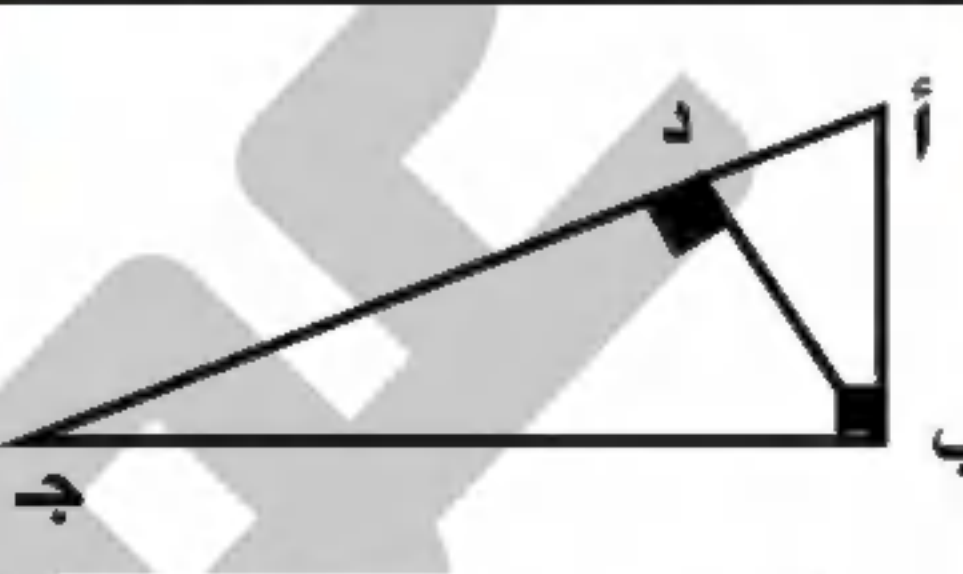


∴ Δ م أ ب قائم ، ق (ب) = ٣٠

∴ م أ = $\frac{1}{2}$ م ب

الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر

٢٦



إقليدس

∴ Δ م أ ب قائم ، ب د ⊥ الوتر أ جـ

∴ ب د = $\frac{\text{أ ب} \times \text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

٢٧

لإثبات أن الشكل رباعي دائري ابحث عن
أحدى الحالات الآتية :

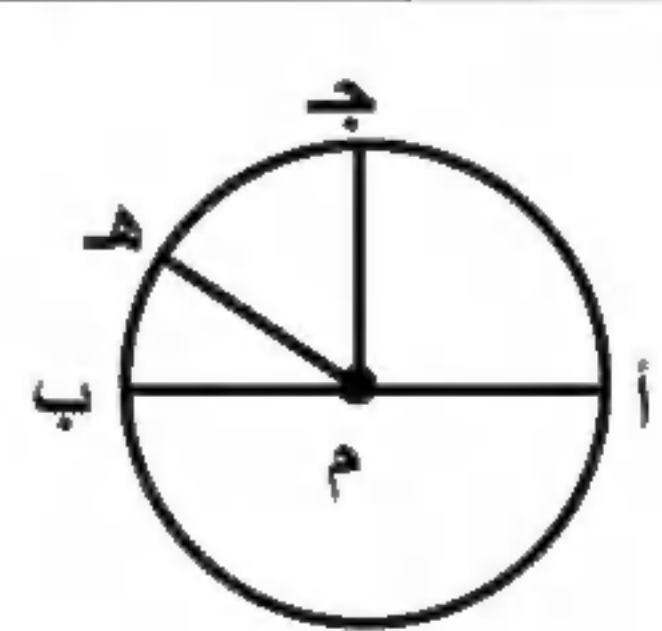
١- زاويتان متقابلتان متكاملتان

٢- زاوية خارجة تساوي المقابلة للمجاورة

٣- زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة

وفي جهة واحدة منها ومتساويتان

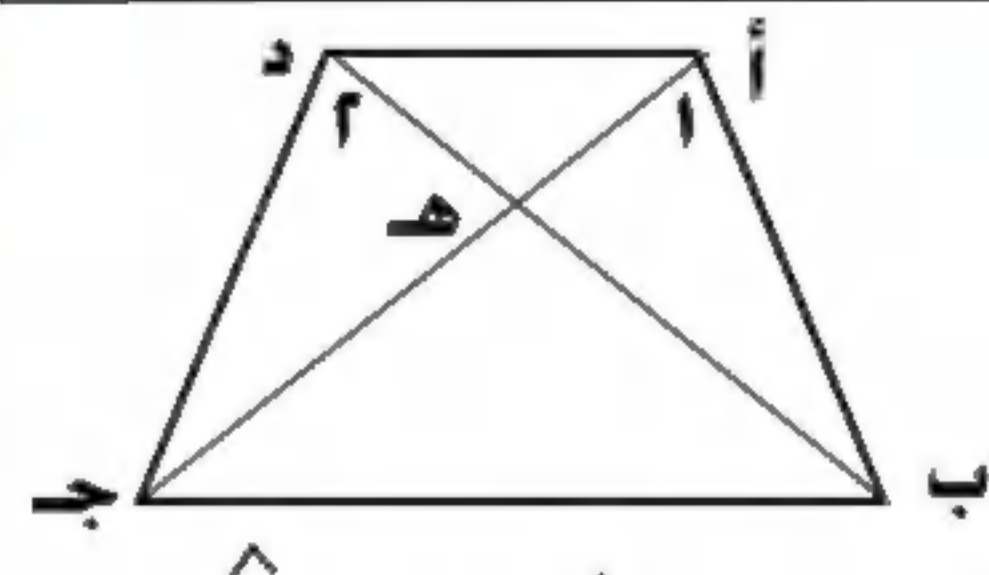
٢٨



∴ أ ب قطر ∴ ق (أ جـ ب) = ١٨٠

∴ ق (أ جـ) + ق (جـ هـ) + ق (هـ ب) = ١٨٠

٢٩

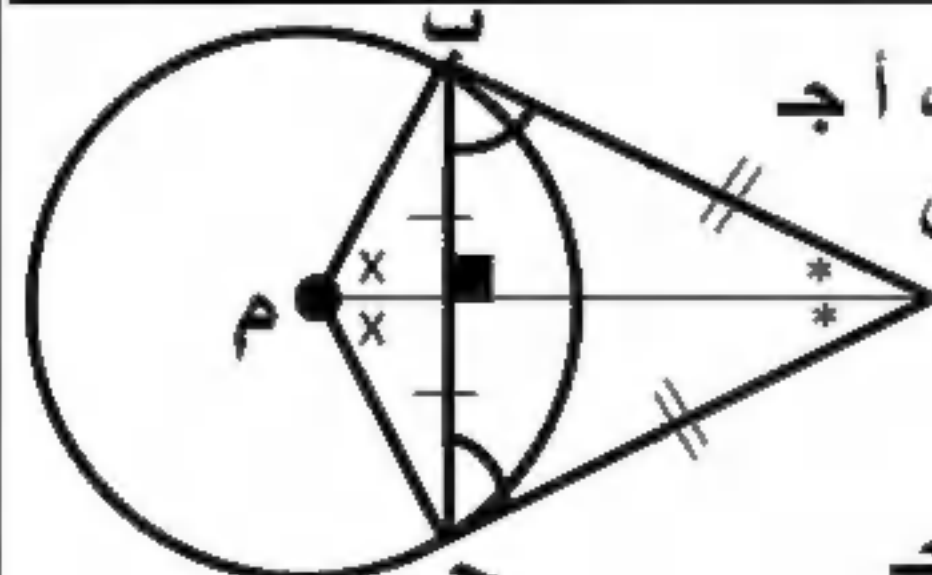


إذا كان ق (١) = ق (٢)

∴ أ ب جـ د رباعي دائري

والعكس صحيح

٣٠



∴ أ ب ، أ جـ

قطعتان مماستان

فإن :

▪ أ ب = أ جـ

▪ ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب)

▪ أ م ينصف أ وينصف م

▪ أ م ⊥ ب جـ

▪ أ ب م جـ رباعي دائري

معلم رياضيات
محمود عوض

- ١ مساحة المعين الذي طولاً قطريه ٦ سم ، ٨ سم = سم
- الحل: مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولاً قطريه = $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ سم
- ٢ مجموع طولى أي ضلعين في المثلث طول الضلع الثالث
- ٣ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ) = 2$ ، $\angle(ب) + \angle(ج) = 2$ فإن زاوية ب تكون
- ٤ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ) < 2$ ، $\angle(ب) + \angle(ج) = 2$ فإن زاوية ب تكون
- ٥ في المثلث أ ب ج إذا كان $\angle(أ) < 2$ ، $\angle(ب) + \angle(ج) = 2$ فإن زاوية ب تكون
- ٦ قياس زاوية الشكل السداسى المنتظم =
- ٧ عدد محاور تماثل المربع = ، عدد محاور تماثل المستطيل =
- ٨ ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س - ٤ ص + ١٢ = ٠ هو
- ٩ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات =
- ١٠ عدد محاور تماثل نصف الدائرة عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين
- ١١ القطران المتساويان في الطول وغير متعامدان في
- ١٢ مربع محيطه ٢٠ سم تكون مساحته = سم^٢
- ١٣ إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ (٣ ، -٥) ، ب (٥ ، ١) فإن مركز الدائرة م هو
- ١٤ دائرة محيطها ٨ π فإن طول قطرها =
- ١٥ في المثلث القائم طول المتوسط الخارج من الزاوية القائمة يساوى
- ١٦ في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى
- ١٧ عدد المستطيلات في الشكل المقابل

--	--	--

انتهت المذكرة مع تمنياتي الخالصة لكم بالنجاح والاستمرار في النجاح